HAL open science

Enseignement à l'Université, perspective institutionnelle et contrat didactique. Le cas de la dualité en algèbre linéaire

Martine de Vleeschouwer

▶ To cite this version:

Martine de Vleeschouwer. Enseignement à l'Université, perspective institutionnelle et contrat didactique. Le cas de la dualité en algèbre linéaire. Sciences de l'Homme et Société. Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix (Université de Namur), 2010. Français. NNT : . tel-01237634

HAL Id: tel-01237634

https://theses.hal.science/tel-01237634

Submitted on 3 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE

Enseignement à l'Université, perspective institutionnelle et contrat didactique.
Le cas de la dualité en algèbre linéaire

Thèse présentée par

Martine DE VLEESCHOUWER

en vue de l'obtention du grade

de Docteur en Sciences

Composition du Jury :

Jean-Luc DORIER

Ghislaine GUEUDET (Directeur)

Valérie HENRY

Marc ROMAINVILLE

Suzanne THIRY (Promoteur)

Carl WINSLØW

Septembre 2010

© Presses universitaires de Namur & Martine De Vleeschouwer
Rempart de la Vierge, 13
B - 5000 Namur (Belgique)

Toute reproduction d'un extrait quelconque de ce livre,
hors des limites restrictives prévues par la loi,
par quelque procédé que ce soit, et notamment par photocopie ou scanner,
est strictement interdite pour tous pays.

Imprimé en Belgique

ISBN : 978-2-87037-691-1
Dépôt légal: D / 2010 / 1881 / 38

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix
Faculté des Sciences
rue de Bruxelles, 61, B-5000 Namur, Belgium

Enseignement à l'Université, perspective institutionnelle et contrat didactique.

Le cas de la dualité en algèbre linéaire

par Martine De Vleeschouwer

Résumé : Notre travail de recherche a pour objet d'étude la dualité en algèbre linéaire. Il se positionne dans une perspective institutionnelle. C'est ainsi la théorie anthropologique du didactique qui sert de cadre théorique principal à notre travail, et qui nous permet de proposer une description du *secteur dualité* dans le domaine de l'algèbre linéaire, en le décomposant en cinq thèmes. Une analyse de la dualité comme savoir à enseigner est réalisée à différents niveaux, avec entre autres l'introduction et la définition de *cinq finalités outil* pour ce secteur. Sur base de cette présentation, une enquête concernant la dualité a été conçue et menée auprès d'étudiants inscrits en première année d'université en mathématiques ou en physique à l'université de Namur (Belgique). Nous en présentons les résultats en catégorisant les difficultés rencontrées par les étudiants. Nous montrons de quelle manière nous pouvons parler de transition à propos de dualité, et comment les difficultés identifiées peuvent être interprétées comme des conséquences d'un changement de contrat didactique institutionnel. Enfin, nous formulons des propositions pour l'introduction de la dualité en algèbre linéaire. L'énoncé de différentes perspectives conclut notre travail.

Teaching at University, institutional point of view and didactical contract.

The case of duality in linear algebra

by Martine De Vleeschouwer

Abstract: The object of our research work is the study of duality in linear algebra. An institutional point of view is adopted. The anthropological theory of didactics has been chosen as main theoretical framework. It allows us to propose a description of the *duality sector* in the linear algebra domain, by decomposing it into five themes. An analysis of duality as a knowledge to be taught is realized at various levels, with among others the introduction and the definition of *five purpose tools* for this sector. Drawing on this presentation, a survey concerning duality was elaborated and submitted to students enrolled in first-year university mathematics or physics programs at the University of Namur (Belgium). We present the results by categorizing the difficulties met by the students. We show how we can speak of transition about duality, and how the identified difficulties can be interpreted as consequences of a change of institutional didactical contract. Finally, we formulate propositions for the introduction of duality in linear algebra. The statement of various perspectives concludes our work.

Dissertation doctorale en Sciences mathématiques (Ph.D. thesis in Mathematics)

Date : 30-09-2010

Département de Mathématique

Promoteur (Advisor) : Prof. S. THIRY

Directeur (Director) : Prof. G. GUEUDET

Remerciements

La rédaction des remerciements que je tiens à adresser ici se fera, par la force des choses, linéairement. Je tiens cependant à préciser que l'ordre dans lequel je les présente n'est certes pas porteur d'une quelconque préférence. Ils sont tous exprimés avec une même intensité pour les uns comme pour les autres.

Cette thèse n'aurait jamais pu voir le jour sans la création préalable d'une unité de didactique des mathématiques au département de mathématique des FUNDP, et d'un poste assistant mi-temps qui m'a permis d'effectuer ma recherche. Merci à Suzanne Thiry et aux autres personnes qui ont œuvré pour la création de cette unité et du poste associé.

Merci à Suzanne Thiry et à Ghislaine Gueudet de m'avoir fait confiance et d'avoir accepté, pour l'une d'être la promotrice de ma thèse, et pour l'autre d'en être la directrice. Merci à toutes deux pour leur présence, leurs remarques, leurs conseils et leurs encouragements tout au long de ce travail de thèse. Merci à toutes deux pour tout le temps que vous m'avez consacré. Un merci particulier à Ghislaine pour son accueil toujours chaleureux lors de mes séjours à Rennes et pour son engouement communicatif envers la recherche en didactique des mathématiques. Je suis fière de l'avoir eue comme directrice de thèse.

Merci aux autres membres du jury d'avoir accepté cette tâche, et de m'avoir permis d'améliorer ce manuscrit grâce à leurs remarques et leurs suggestions pertinentes :

- Merci à Jean-Luc Dorier pour tous les travaux déjà réalisés en algèbre linéaire, notamment en ce qui concerne la partie historique et épistémologique de ce domaine mathématique, sans oublier les diverses recherches effectuées sur le terrain. Il a ainsi constitué une manne précieuse dans laquelle d'autres chercheurs peuvent puiser. Merci à lui de m'avoir éclairée et conseillée sur mon travail.

- Merci à Valérie Henry, pour les discussions que nous pouvons avoir, entre autres, sur des aspects didactiques. Merci pour son sens de l'organisation lorsque nous partons en congrès.

- Merci à Marc Romainville, brillant pédagogue, qui a réalisé l'effort de se plonger dans la dualité en algèbre linéaire en acceptant d'être membre du jury de cette thèse.

- Merci à Carl Winslow d'avoir également accepté de faire partie du jury. Le rencontrer et échanger avec lui en congrès est toujours très enrichissant et constructif.

Merci aux habitués du « Groupe Sup », cette communauté internationale de chercheurs en didactique des mathématiques enseignées à l'université, qui m'a aidé à progresser en didactique des mathématiques et à ouvrir mes horizons. Un merci particulier à Stéphanie Bridoux, Claire Cazes, Nicolas Grenier-Boley, Stéphane Ginouillac, Jacqueline Mac Aleese, Aline Robert, Marc Rogalski et Fabrice Vandebrouck.

Merci aux différents chercheurs et professeurs que j'ai pu rencontrer lors de conférences internationales et avec qui j'ai pu avoir des échanges très enrichissants ainsi que d'intéressantes perspectives pour la recherche future. Je pense particulièrement à Michèle Artigue, Claire Berg, Viviane Durand-Guerrier, Patrick Frétigné, Denise Grenier, Johanna Mamona-Downs et Maria Trigueros.

Merci à Philippe Toint et Anne Lemaître qui ont accepté la mise en œuvre, dans leur cours d'algèbre linéaire, de certains dispositifs élaborés dans le cadre de ma recherche.

Merci à tous les étudiants de mathématiques et de physique qui ont accepté de répondre aux différents questionnaires et interviews qui ont été nécessaires à cette recherche.

Merci à mes collègues de bureau successifs, Eric Cornélis et Charlotte Beauthier, pour leur soutien et leur présence journalière.

Merci à tous mes collègues du département de mathématique, et spécialement à Anne-Sophie Libert et Sebastian Xhonneux, pour les (parfois longues) discussions échangées et leur soutien.

Merci à tous mes collègues des facultés de Namur qui m'ont encouragée tout au long de ce travail, notamment aux membres de l'unité d'appui à l'enseignement (U.A.E.), et aux membres du conseil des cellules didactiques (C.C.C.) des FUNDP.

Merci à ma famille, au sens large, et à mes amis pour leur patience et leur indulgence envers mon absence lors des derniers mois de mon travail de thèse. Un merci tout spécial à Fabienne Lombardo-Delvaux, qui a ainsi accepté de fêter son anniversaire avec moi… neuf mois après la date effective !

Merci à Aurore Bollen, notre baby-sitter attitrée et amie de la famille, qui m'a plus que secondée au niveau de la famille dans certaines périodes de ma thèse.

Merci à mes parents, Philippe et Anne-Marie De Vleeschouwer-Lacroix, pour leur présence et leur soutien dans l'encadrement familial. Un merci tout particulier à papa pour sa lecture attentive et commentée de la thèse.

Merci à mes enfants Pascaline, Olivier, Céline, Katheline et François Dieudonné pour leur indulgence envers mes absences lors des congrès et lorsque je me concentrais aux dépouillements de questionnaires ou à la rédaction de la thèse. Merci pour leur compréhension, leurs encouragements, leur patience et leur amour qui m'ont été indispensables pour mener ce travail à bien.

Merci à mon mari, Alain Dieudonné, qui m'a toujours soutenue et encouragée dans mon travail de recherche en mettant parfois ses hobbies de côté afin de m'épauler davantage dans l'organisation familiale pendant les années de recherche et surtout pendant les mois de rédaction de la thèse. Sa présence, son amour, son soutien et sa confiance en moi m'ont aidé à persévérer dans les moments les plus difficiles. Merci pour l'équilibre et la force qu'il m'apporte. Pour tout cela et pour tout le reste, je le remercie de tout mon cœur.

Merci à vous tous, pour tout ce que vous m'apportez.

Martine.

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES DES ANNEXES

Introduction

La dualité a joué un rôle central dans la mise au jour de notions élémentaires en algèbre linéaire (Dorier 2000). Cependant, aucun travail didactique à ce jour ne l'avait encore considérée comme un sujet de recherche, alors que son enseignement, dans un cours d'algèbre linéaire, est souvent redouté par les professeurs (Escofier 2006), et les étudiants (Merlin 1995). Escofier écrit par exemple :

> Le chapitre 10 est un peu à part. Il présente des notions sur l'espace vectoriel formé par les hyperplans d'un espace vectoriel, appelé espace dual. Certaines et certains pourront le trouver un peu difficile, un peu abstrait ; si sa lecture peut-être différée jusqu'au chapitre 16, il semble plus à sa place ici. (Escofier 2006, p. 175).

Et Merlin commence le chapitre sur la dualité en ces termes :

> Nous ne sommes absolument pas certains que l'ensemble des possesseurs de ce livre (que nous saluons au passage) auront le courage de lire ce chapitre, répugnés qu'ils sont par ce phénomène étrange appelé dualité. (Merlin 1995, p. 61).

Notre travail constitue donc une première recherche en didactique concernant l'objet dualité. Or, le sujet est vaste. Nous ne pouvons évidemment pas aborder, dans ce travail, tous les aspects de la dualité, dont l'étude sera à poursuivre.

L'origine de notre sujet de recherche a pour cadre l'université de Namur en Belgique : la dualité y est enseignée dans un cours d'algèbre linéaire destiné à des étudiants inscrits en première année dans une filière spécifique pour futurs mathématiciens ou physiciens. Plusieurs travaux didactiques ont déjà mis au jour des difficultés recensées lors de l'apprentissage de premières notions d'algèbre linéaire (Dorier 1997). Des pistes ont ainsi été dégagées afin d'améliorer leur enseignement. Mais, alors que l'apprentissage de la dualité en algèbre linéaire pose des problèmes récurrents d'année en année pour les étudiants de l'université de Namur, aucune étude n'avait encore été effectuée à ce jour pour en cerner les causes ou présenter des propositions en vue d'améliorer la situation.

C'est ce constat initial, fait en tant qu'enseignante, qui a motivé notre intérêt pour la dualité en algèbre linéaire. Bien que la dualité puisse prendre d'autres formes (dualité topologique, etc.), nous ne nous y sommes pas intéressée dans notre travail. Il faut donc comprendre « dualité en algèbre linéaire » ou « dualité algébrique » lorsque le terme « dualité » est utilisé sans autre précision dans ce travail. De plus, nous considérons très souvent le cas de la dimension finie, qui est souvent le cadre d'introduction des notions de dualité (Halmos 1974, Merlin 1995, Etienne 2006, etc.), même si nous précisons la portée des résultats quand ils ne sont valables qu'en dimension finie. En effet, certains amalgames peuvent engendrer des problèmes spécifiques en dimension infinie.

Les questions initiales que nous nous posons a priori sont donc :

- Quelles sont les difficultés que rencontrent les étudiants lors de l'apprentissage des notions liées à la dualité ?

- Quelles interprétations peut-on faire de ces difficultés, quelles hypothèses sur leurs causes,

- Que peut-on mettre en œuvre pour y remédier ?

Pour tenter d'apporter des éléments de réponse à ces questions, nous nous plaçons dans une perspective institutionnelle (Chevallard 2007). Ce point de vue nous permet de parler de phénomènes de transition (Gueudet 2008, Artigue 2006, Winsløw 2008) auxquels les étudiants sont confrontés en passant de l'institution enseignement secondaire à l'institution université où la dualité est enseignée.

Ainsi, dans un premier temps (chapitre 1), nous présentons tout d'abord les cadres théoriques qui nous permettent, d'une part de penser la transition secondaire-université, et d'autre part de nous éclairer dans notre recherche sur la dualité. Ceux-ci nous sont déjà utiles afin de donner une première description du secteur dualité, faisant apparaître différents thèmes de la dualité. Nous présentons ensuite des travaux déjà réalisés en didactique concernant l'algèbre linéaire sur lesquels nous avons pris appui dans notre recherche. Nous sommes alors en mesure de préciser les questions de recherche auxquelles notre travail se propose d'apporter des éléments de réponse.

Nous proposons tout d'abord (chapitre 2) de présenter la genèse historique de la dualité en algèbre linéaire, pour nous permettre une prise de recul par rapport aux enjeux didactiques présents dans l'institution d'enseignement. Cette genèse est susceptible de constituer un appui ou une référence lors de l'analyse des difficultés des étudiants.

Nous étudions ensuite (chapitre 3) la dualité algébrique considérée comme un savoir à enseigner. Pour ce faire, nous nous penchons sur une analyse de manuels variés qui traitent de cette matière. Cette analyse est éclairée par les cadres théoriques retenus pour notre recherche.

Nous nous tournons ensuite (chapitre 4) vers la détermination des difficultés des étudiants avec la dualité. Les éléments dégagés des chapitres précédents nous permettent de proposer une enquête qui sera menée à l'université de Namur auprès d'étudiants (débutants et confirmés) suivant un enseignement de dualité. Les cadres théoriques servant de support à notre recherche nous permettent alors d'analyser les résultats de cette enquête afin de proposer une classification des difficultés observées.

Les différents éléments mis au jour dans notre recherche sont ensuite (chapitre 5) mobilisés pour établir des propositions d'enseignement concernant l'introduction de différents thèmes de la dualité. Certaines de ces propositions ont été mises en œuvre à l'université de Namur. Nous décrivons celles-ci et présentons une analyse des données récoltées suite à leur mise en place, et leurs conséquences sur les étudiants.

Nous donnons en conclusion une synthèse des résultats obtenus et indiquons les perspectives ouvertes par notre recherche.

Chapitre 1. Cadres théoriques et questions de recherche

Nous avons décrit, dans l'introduction, la problématique initiale sur laquelle nous nous sommes penchée dans ce travail. Nous nous proposons ici d'en planter le décor. Ainsi, nous présentons tout d'abord (§ 1) les cadres théoriques qui nous ont permis de travailler. Nous sommes alors en mesure de décrire ce que nous entendons par « notions liées à la dualité » (§ 2). Nous présentons ensuite (§ 3) des travaux didactiques réalisés en algèbre linéaire, dont certains traitant de dualité. Enfin, nous affinons la problématique qui nous intéresse (§ 4) en précisant nos questions de recherche, et en indiquant en quoi le contenu de ce chapitre nous sera utile dans la suite de nos travaux.

1. Cadres théoriques pour penser la transition secondaire supérieur

Nous allons présenter, dans cette section, les différents cadres théoriques dont nous nous sommes servie dans nos travaux. Après une introduction présentant une synthèse sur les travaux concernant la transition secondaire-supérieur, nous abordons successivement la théorie APOS (Dubinsky & Mc Donald 2001), la dialectique outil-objet et les jeux de cadres (Douady 1986), les registres de représentation sémiotiques (Duval 1995), les praxéologies et les niveaux de détermination introduits dans la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 2007). Nous abordons ensuite le contrat didactique (Brousseau 1986) et le contrat institutionnel (Chevallard 1989). Enfin, nous présentons la manière dont Winsløw (2008) parle de transition à l'intérieur d'une même institution. Nous terminons cette section en montrant la façon dont ces différents cadres théoriques peuvent s'articuler entre eux.

1.1. Introduction : la transition

Nous l'avons dit, notre travail s'intéresse à un secteur de l'algèbre linéaire qui est enseigné, à l'université de Namur, à des étudiants de première année d'université. Ces étudiants sont donc naturellement confrontés à un phénomène de transition, par le simple fait qu'ils changent d'institution. Nous parlons ici bien entendu de transition entre deux institutions que sont l'institution enseignement secondaire et l'institution enseignement universitaire. D'autres formes de transition existent, nous y reviendrons (§ 1.6).

Intéressons-nous dans cette section à la transition secondaire-université[1]. Elle a déjà été abordée dans de nombreux travaux, dans différents pays, et selon différentes approches. Gueudet (2008) choisit de classer ces différentes approches selon cinq thèmes principaux. D'autres classements sont possibles (voir par exemple Artigue 2006), mais les thèmes proposés par Gueudet constituent une introduction adaptée à notre questionnement, fournissant une structure des cadres de recherche pertinents. Les cinq approches de la transition proposées sont les suivantes (Gueudet 2008) :

- **Les questions sur les « modes de pensée »**. On peut se dire que le changement d'institution se caractérise par un changement de la pensée mathématique. Tall (1991) utilise le terme de « transition » pour parler d'un passage d'une « pensée élémentaire »

[1] Précisons qu'en Belgique, lieu principal de notre recherche, l'université est l'institution qui décerne les diplômes les plus « cotés », contrairement à la France par exemple où les grandes écoles supplantent les universités.

vers une « pensée mathématique avancée (AMT pour Advanced Mathematical Thinking) » :

> The move from elementary to AMT involves a significant transition: that from describing to defining, from convincing to proving in a logical manner based on definitions (Tall 1991, p. 20).

Nous ne rentrons pas dans le débat, non encore clos à ce jour, d'essayer de définir ce que l'on entend par « pensée mathématique avancée[2] ». Certains auteurs, comme Edwards *et al.* (2005) lient l'AMT à des notions mathématiques qui ne nous sont pas accessibles à travers nos cinq sens (p.17). Mais tous les auteurs ne partagent pas ce point de vue. Dreyfus (in Tall 1995), par exemple, précise que l'on peut penser de façon élémentaire à propos d'objets mathématiques avancés et penser de façon avancée à propos d'objets mathématiques simples. Nous dirons donc que nous pouvons, tout au plus, tenter de donner quelques caractéristiques de l'AMT : elle serait basée sur des définitions d'objets mathématiques, et non des descriptions ; des démonstrations seraient présentées plutôt que des exemples ou contre-exemples ; des concepts abstraits seraient utilisés, etc.

On peut donc dire que le passage d'une pensée mathématique élémentaire à une pensée mathématique avancée ne s'opère pas nécessairement au moment du changement d'institution. Nous n'avons pas dit que la transition secondaire-université se situait uniquement pendant les deux ou trois mois séparant la dernière année du secondaire du début de la rentrée universitaire : la transition peut s'étaler sur plusieurs années, et on peut imaginer qu'elle commence jusqu'à deux ans avant la fin du secondaire, pour se poursuivre jusqu'aux deux premières années de l'enseignement universitaire. De même, le passage d'une pensée élémentaire à une pensée avancée peut être un processus qui s'étale dans la durée.

En centrant le regard sur les modes de pensée, des chercheurs étudient les modes de construction des connaissances chez les élèves ou les étudiants, adoptant ainsi un point de vue cognitif sur la transition. Selon les chercheurs, différentes caractérisations de la pensée des étudiants sont proposées (Dubinsky 1991, Gray & al. 1999, Sfard 1991, Sierpinska 2000), éclairant ainsi les raisons des difficultés rencontrées par les étudiants et pouvant alors proposer des dispositifs d'enseignement adaptés. Nous développons plus avant la théorie APOS, élaborée par Dubinsky et le groupe RUMEC[3], qui relève de cette catégorie, dans la section 1.2 ci-après.

- **Les questions sur l'organisation des connaissances des étudiants**. Plusieurs travaux traitant de la transition (implicitement ou explicitement) relèvent de cette catégorie. Nous n'en précisons qu'un en particulier, qui constitue une référence pour de nombreux travaux : Robert (1998). Cette auteur fait l'hypothèse que lors de la transition (au sens temporel large) du secondaire à l'université, les mathématiques enseignées vont de plus en plus ressembler aux mathématiques « des experts » (c'est-à-dire des mathématiciens professionnels). Pour analyser cette situation, Robert (1998) distingue trois *niveaux de mise en fonctionnement des connaissances* :

---

[2] « Pensée mathématique avancée » ou Advanced Mathematical Thinking (AMT) est aussi le titre de groupes de travail présents dans différents groupements (PME (Psychology of Mathematics Education), CERME (Conference of European Research in Mathematical Education),etc.) où la question de définir cette AMT a déjà été abordée, sans qu'un véritable consensus puisse ressortir.

[3] RUMEC est l'acronyme de Research in Undergraduate Mathematics Education Community. Il s'agit d'un groupe informel d'enseignants et de chercheurs utilisant le cadre d'APOS pour des recherches sur l'enseignement des mathématiques au niveau post-secondaire.

- Le niveau *technique*, qui se réfère à des mises en fonctionnement isolées mettant en jeu des applications directes de théorèmes, propriétés, etc.
- Le niveau *mobilisable*, où des adaptations peuvent être nécessaires, mais sont indiquées ;
- Le niveau *disponible*, qui correspond à la résolution sans indications, à la recherche par soi-même des connaissances qui peuvent aider à la résolution.

Les mathématiciens experts ont un niveau de mise en fonctionnement de leurs connaissances qui est disponible, et certains professeurs à l'université pourraient penser que les étudiants entrant à l'université disposent de connaissances « disponibles » par rapport aux notions enseignées en secondaire, alors que ce n'est pas toujours le cas. De plus, alors qu'ils attendent un niveau disponible au terme de leur enseignement, c'est parfois paradoxalement le caractère technique qui est uniquement atteint par le type d'enseignement dispensé à l'université. En effet, même si des exercices variés sont proposés dans les travaux dirigés associés à un cours, les évaluations (internes à l'université) questionnent généralement le niveau technique de mise en fonctionnement des connaissances des étudiants.

Ces niveaux de mise en fonctionnement des connaissances sont davantage explicités au chapitre 3 de notre travail, dans la section 2.4 où ils sont utilisés.

- **Les questions sur les « pratiques mathématiques »**. Ces questions attirent l'attention sur le fait que les pratiques mathématiques (le raisonnement, le langage et l'écriture, les démonstrations, etc.) ne sont pas nécessairement les mêmes d'une institution à une autre. Praslon (2000), dans sa thèse, parle de micro-ruptures entre les institutions du secondaire et de l'université, dont l'accumulation va aggraver les difficultés des étudiants. Ainsi, dans l'institution université, un langage formel est utilisé, le temps didactique s'accélère, une autonomie plus grande est demandée aux étudiants, il y a une séparation entre cours théoriques et exercices, il n'y a plus de répétition systématique de tâches, l'étudiant est confronté pour la première fois à plusieurs professeurs de mathématiques, etc.

  On peut donc aussi parler là de transition, en faisant référence aux pratiques attendues (mais non toujours explicitées) dans une institution particulière, ce qui est généralement évoqué par les termes de contrat didactique et contrat institutionnel. Nous aurons l'occasion de développer plus en détail ces termes dans la section 1.5 ci après.

  Pour expliquer ces changements de pratiques attendues, nous aurons aussi recours à la notion d' « organisation mathématique » (Chevallard 2007) que nous développons davantage à la section 1.4. En effet, les organisations mathématiques sont le résultat d'une structuration institutionnelle, pour un contenu de savoir donné. Dès lors, leur prise en compte et leur analyse peut aider à expliquer les difficultés liées à la transition, comme passage d'une organisation mathématique à une autre. C'est d'ailleurs à travers les organisations mathématiques que nous pourrons également parler de transition au sein d'une même institution, grâce au cadre proposé par Winsløw (§ 1.6).

- **Les questions sur des notions particulières**. Certains travaux en didactique des mathématiques se penchent sur un domaine mathématique bien particulier, généralement source de difficultés observées auprès des étudiants[4]. Ces difficultés peuvent provenir du caractère formalisateur, unificateur, généralisateur et/ou simplificateur des notions abordées (Robert 1998). Le degré de *formalisation* attaché à une notion peut varier selon qu'un nouveau formalisme soit (ou non) utilisé, ce formalisme pouvant s'exprimer par des

[4] Notre travail relève majoritairement de cette catégorie du classement.

mots (par exemple : « famille libre », « vecteurs linéairement indépendants ») ou des symboles mathématiques (par exemple : $\sum$, $\forall$, etc). Par ailleurs, certaines notions mathématiques permettent l'*unification* de notions antérieures (par exemple : le terme « vecteur » en algèbre linéaire unifie sous un même vocable une fonction, une équation et un n-uplet). Le degré de *généralisation* d'une notion mathématique par rapport à des notions précédemment introduites mesure la facilité avec laquelle la notion mathématique en question s'insère parmi les notions antérieures (le passage de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^3$ est plus aisé que celui de $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}^n$). Enfin, le caractère *simplificateur* d'une notion mathématique découle généralement de l'attribution des autres caractères précédemment décrits. En effet, l'introduction d'un nouveau formalisme permettra de faciliter le langage ou les écritures mathématiques ; une notion mathématique qui en unifie plusieurs permettra un même raisonnement sur des objets mathématiques différents, simplifiant ainsi la tâche du mathématicien. On peut distinguer, dans le caractère simplificateur, le fait qu'une nouvelle notion permette de donner une réponse à un problème que l'on peut décrire, mais pas résoudre avec les connaissances préalablement acquises ; du fait qu'une nouvelle notion permette de résoudre d'une manière différente un problème dont on pouvait déjà établir la solution auparavant, au moyen d'autres techniques connues.

Une notion mathématique revêtant les caractères formalisateur, unificateur, généralisateur et simplificateur (FUGS) cumule ainsi des difficultés pour les étudiants. C'est le cas par exemple des notions d'algèbre linéaire. Considérons en particulier les espaces vectoriels pour illustrer nos propos : bien que ces derniers ne soient pas enseignés en tant que tels dans l'enseignement secondaire, on peut tout de même parler de transition lors de leur enseignement à l'université, de par le caractère unificateur (entre autre !) de cette notion. En effet, pour unifier, il faut des éléments à la base, et en ce qui concerne les espaces vectoriels par exemple, ces éléments peuvent consister en des polynômes, des équations d'un système linéaire, des vecteurs géométriques (Hillel 1997), des fonctions, etc. Ces notions sont enseignées dans l'institution secondaire en Belgique. C'est dans ce sens qu'il est permis de parler de transition à propos de notions FUGS.

Un autre domaine des mathématiques où des notions FUGS sont régulièrement abordées dans des travaux de didactique est le domaine de l'analyse. Nous pouvons par exemple citer les travaux de Praslon (2000), Bloch (2000), Bloch & Ghedamsi (2004), Bridoux (2009).

Gueudet distingue de plus une cinquième approche de la transition basée sur **les questions sur l'enseignant de l'université**, mais nous ne faisons pas spécifiquement référence à cette catégorie de travaux traitant de la transition dans notre travail.

Développons maintenant les différents cadres annoncés.

1.2. La théorie APOS

Certains travaux en didactique des mathématiques (dont plusieurs relatifs à l'algèbre linéaire) utilisent comme cadre de référence la théorie APOS (Dubinsky 1991), développée par des chercheurs des Etats-Unis et du Mexique (Dubinsky et le groupe RUMEC[3]). Nous nous proposons dans cette section, de présenter cette théorie, qui s'intéresse à la manière dont les concepts mathématiques se construisent et s'intègrent dans un réseau de connaissances. Suite à la description de la construction de connaissances, des propositions concrètes d'enseignements sont élaborées, toujours dans le cadre de cette théorie, mettant ainsi en évidence la relation étroite existant entre la recherche en didactique et l'enseignement (Trigueros & Oktaç 2005).

APOS est l'acronyme de Action-Processus-Objet-Schéma. S'appuyant sur la théorie de Piaget, la théorie APOS propose un modèle de construction des connaissances mathématiques passant par différents stades : Action, Processus, Objet, Schéma. Se basant sur le principe d'*abstraction réfléchissante* selon lequel les actions (physiques ou mentales) qu'un sujet opère sur un objet agissent, par réflexion, sur le sujet lui-même (ou en tous cas sur la construction de ses connaissances), la théorie APOS commence par proposer des Actions sur la ou les notions que l'on souhaite enseigner.

Une Action est une transformation d'Objets que l'apprenant opère sous demande *extérieure*. Ainsi, ce que l'apprenant doit faire est clairement explicité dans ce qui lui est demandé ; il doit « juste » agir. Dans la théorie APOS, les Actions déterminent le commencement de la compréhension d'un concept. Ainsi, pour l'apprentissage de la notion d'espace vectoriel par exemple, une Action consisterait à vérifier si pour un ensemble donné et une loi donnée, cette loi vérifie la propriété d'associativité. L'apprenant n'a « qu'à » appliquer la définition, ce qu'il doit faire est bien précisé dans la demande.

Un Processus est le résultat d'une répétition d'Actions et d'une réflexion sur celles-ci. Il y a alors *intériorisation* de l'Action qui devient un Processus. Alors qu'une Action n'était que le résultat d'une demande externe, le Processus est perçu par l'apprenant comme quelque chose d'interne, qu'il contrôle. Dans notre exemple sur l'apprentissage des espaces vectoriels, une connaissance-Processus serait acquise lorsqu'un apprenant serait capable d'expliquer, sans nécessairement le faire, comment vérifier qu'un ensemble donné muni de lois qui auraient été définies, constitue un espace vectoriel.

Le stade d'Objet est atteint lorsque l'apprenant, ayant réfléchi sur les opérations portant sur un certain Processus, prend conscience de la globalité du Processus. Ce dernier peut alors être considéré comme une transformation globale. On dit alors que l'apprenant a *encapsulé* le Processus pour en faire un Objet cognitif. Ainsi, par exemple, on pourra dire qu'un apprenant a une connaissance-Objet des espaces vectoriels s'il arrive à démontrer par exemple qu'un espace engendré par un ensemble de vecteurs est aussi un (sous-)espace vectoriel.

Remarquons qu'à ce stade de connaissance, l'apprenant est aussi capable de *désencapsuler* l'Objet pour travailler de nouveau avec le Processus lors de la résolution d'un problème. Des allers-retours sont possible, la liaison Action-Processus-Objet n'est pas à sens unique.

Enfin, le Schéma d'un concept mathématique correspond à l'ensemble des Actions, Processus, Objets et autres Schémas qui sont reliés entre eux de façon à déterminer pour l'apprenant un ensemble cohérent. Arrivé à ce stade de connaissance, le sujet est capable de reconnaître les situations dans lesquelles le concept mathématique peut être appliqué de celles où il n'est d'aucune utilité. Ainsi, un étudiant pourra penser utiliser tel théorème lorsqu'il sera en présence d'un ensemble muni de lois qu'il reconnaîtra comme constituant un espace vectoriel.

Un nouvel Objet peut aussi être constitué par l'apprenant lorsqu'un Schéma est considéré comme un objet sur lequel on peut faire des actions. On dit alors que le Schéma a été *thématisé*.

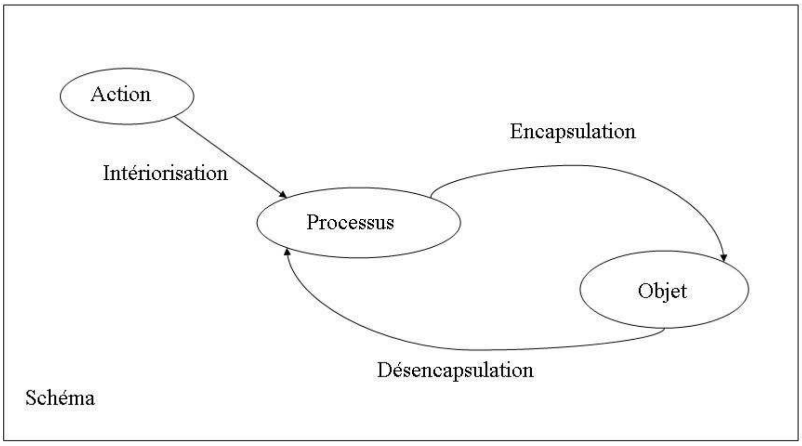


Figure 1-1 : Schématisation de la théorie APOS

Pour mettre la théorie APOS en pratique, le cycle ACE[5] (Activités-discussions en Classe-Exercices) est préconisé. Il s'agit tout d'abord de prévoir des Activités à proposer aux étudiants, dans un environnement où ils peuvent « agir ». C'est pourquoi l'environnement informatique[6] est recommandé, de même qu'un travail collaboratif (travaux en petits groupes). Ces deux composantes favorisent la transformation des Actions en Processus.

Suite aux Actions, des Discussions en Classe sont organisées pour permettre l'institutionnalisation : les concepts mathématiques sont nommés et présentés en tant que tels. La représentation graphique et géométrique fait partie intégrante de la construction de concepts. Elle est systématiquement présente dans les Activités ou dans les Discussions en Classe.

Enfin, des Exercices classiques (résolution écrite) sont proposés aux apprenants.

Remarquons qu'en pratique, avant de pouvoir proposer le cycle ACE, une *décomposition génétique* du concept visé par l'apprentissage est réalisée : il s'agit d'une analyse épistémologique, visant à comprendre la structure du concept afin de mettre en évidence les Actions, Processus, Objets et Schémas liés au concept visé. A titre d'exemple, le lecteur pourra consulter (Trigueros & Oktaç 2005) pour une décomposition génétique du concept d'espace vectoriel, dont nous ne reprenons ici que la figure illustrant la décomposition (Figure 1-2).

[5] En anglais, ACE signifie Activities - Class discussions - Exercices.
[6] Le langage ISETL (Interactive SET Language) est recommandé car sa syntaxe, selon ses concepteurs, ressemble à la syntaxe mathématique. De nombreux développements dans ce langage ont déjà été mis au point concernant l'apprentissage de notions d'algèbre linéaire (voir Trigueros & Oktaç 2005).

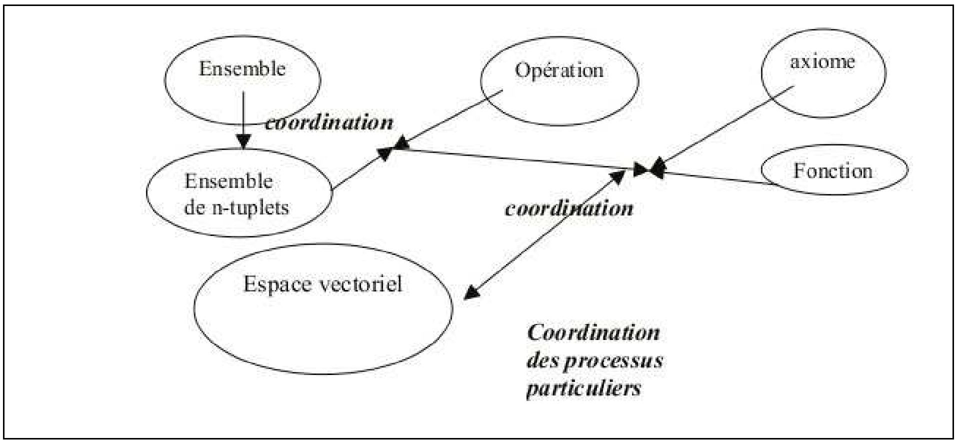


Figure 1-2 : Schéma de la décomposition génétique du concept d'espace vectoriel proposée par Trigueros & Oktaç (2005)

Bien que nous n'utilisions pas le cadre théorique APOS à proprement parler dans nos analyses, nous avons tenu à le présenter dans ce chapitre étant donné que la dualité a été utilisée par Dubinsky pour illustrer des notions développées dans ce cadre théorique. Nous en parlons dans la section 3.2.a) . Le cadre théorique d'APOS est, de plus, utilisé dans plusieurs études portant sur l'algèbre linéaire.

1.3. Dialectique outil-objet, cadres et registres

Dans cette section, nous présentons un cadre théorique proposé par Douady (1986), à propos du statut des notions mathématiques et des différents cadres susceptibles d'intervenir pour une même notion. Nous nous servirons régulièrement de ce cadre théorique au fil de notre recherche (voir en particulier chapitre 3, § 1). Nous faisons également le choix de présenter brièvement ici la notion de registres de représentation sémiotique (Duval 1995), qui complète, dans notre travail, la notion de cadre. Précisons d'emblée que la notion de registre, bien qu'initialement retenue comme un des critères d'analyse dans notre recherche (voir chapitre 3), ne s'est pas révélée être pertinente lors des dépouillements effectués dans notre recherche, qu'il s'agisse de dépouillement de manuels ou de productions d'étudiants.

Dialectique outil-objet

Les mathématiciens professionnels (chercheurs, etc.) partent généralement d'une question ou d'un problème, et développent des outils permettant de mener à bien la ou les tâches qu'ils s'étaient fixées. Ils développent ce que l'on pourrait appeler des *outils* conceptuels. Pour des besoins de diffusion, ces outils sont ensuite retirés de leur contexte initial (décontextualisés) pour intégrer un corpus de savoirs (à prendre au sens général) déjà établi, voire parfois même pour remplacer certains savoirs déjà mises en place. Dès lors, ces outils conceptuels acquièrent le statut d'*objet*. Le corpus de savoirs ainsi établi peut être appelé « savoir savant » ; ce savoir savant de référence peut évidemment varier au cours du temps et des cultures.

Lorsqu'un concept sera mis en œuvre pour résoudre un problème, il aura alors le statut d'*outil*. Bien entendu, un même outil peut être mis en œuvre dans différents problèmes ; un problème peut être résolu par différents outils. Douady distingue encore l'outil explicite de l'outil implicite, selon que le concept visé est mis en œuvre explicitement (on peut en justifier l'emploi) ou de manière implicite.

Pour illustrer nos propos, tournons-nous tout d'abord vers les sous-espaces vectoriels. C'est sous le statut d'*objet* que l'on considère un sous-espace vectoriel V (d'un espace vectoriel E construit sur le champ K) à travers sa définition : $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in K : \alpha x + \beta y \in V$. A partir de cette définition, des propriétés sont établies, voire démontrées, et incorporées à un corpus de savoirs déjà mis en place. Un sous-espace vectoriel est donc bien ainsi considéré sous le statut d'*objet* : on ne considère pas de contexte particulier, on reste dans un contexte de savoirs théoriques décontextualisés. Par contre, lorsque l'on cherche à résoudre un système d'équations linéaires homogène et que l'on transforme volontairement la problématique sous la forme : « déterminons le (sous-espace) noyau de l'application linéaire représentée par le système d'équations linéaires », la notion de sous-espace vectoriel (à travers le noyau) est alors utilisée de manière explicite. La notion de sous-espace vectoriel a alors le statut d'*outil explicite*, permettant explicitement la résolution d'un problème dans un contexte bien particulier.

Illustrons à présent la notion d'*outil implicite* au moyen d'un théorème d'algèbre linéaire. Pour expliciter une relation de dépendance linéaire entre les polynômes $3x^3 + 2x^2 + 6x - 2$, $2x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ et $-5x^2 + 18x - 1$, les étudiants recourent parfois directement à l'expression suivante :

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 18 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

En résolvant le système de quatre équations à trois inconnues issu de la relation ci-dessus, ils trouvent alors les solutions suivantes : $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha = -2\gamma$ et $\beta = 3\gamma$. Ils concluent en disant que comme α, β, γ ne sont pas obligatoirement nuls, les polynômes donnés dans l'énoncé sont linéairement dépendants. En agissant de la sorte, les étudiants utilisent implicitement le théorème affirmant que tout espace vectoriel de dimension n construit sur un champ K est isomorphe à K^n (ici en l'occurrence l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 est isomorphe à $\mathbb{R}^4$), puisqu'ils effectuent tous leurs calculs dans $\mathbb{R}^4$. Ainsi, le théorème assurant l'isomorphisme entre un espace vectoriel de dimension n (construit sur un champ K) et K^n est ici un *outil implicite* dans la technique de résolution utilisée.

Dans notre recherche, nous avons été amenée à compléter la notion d'outil introduite par Douady présentée dans cette partie. Nous développerons nos propos à la section 1 du chapitre 3.

Cadres et jeux de cadres

Après avoir introduit les statuts outil-objet pour un concept, Douady préconise de varier les *cadres* dans lesquels ces concepts interviendront sous ces deux statuts. Le terme « cadre » est à prendre au sens large : un cadre est constitué d'objets mathématiques, de relations entre ces objets, des symboles (y compris des représentations mentales) permettant de les représenter. On parlera de cadre algébrique, géométrique, matriciel, etc. Ainsi par exemple, en prenant pour base un système d'équations linéaires à trois inconnues, on peut dire que l'on se situera :

- dans un cadre *algébrique* si on s'intéresse à résoudre algébriquement (*par substitution*) le système d'équations linéaires donné ;
- dans un cadre *fonctionnel* si on interprète chaque membre de gauche des équations présentes dans le système considéré par l'expression analytique d'une fonction f_i ;

- dans un cadre *graphique* si on s'intéresse à résoudre graphiquement le système d'équations linéaires donné, après avoir donné, à l'aide d'un logiciel adapté, le graphe (en trois dimensions) des fonctions dont les expressions analytiques sont données dans le membres de gauche du système considéré, et en avoir déterminé les (éventuelles) intersections ;
- dans un cadre *géométrique* si on considère que les différentes lignes du système d'équations linéaires sont des plans de l'espace et que l'on s'intéresse dès lors à leur (éventuelle) intersection.

Afin de favoriser la construction de connaissances, Douady (1986) recommande de faire jouer la dialectique outil-objet en faisant varier les cadres dans lesquels les notions mises en jeu sont présentées :

> Le changement de cadre est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui, sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. (Douady 1986, p. 11).

Nous nous appuyons sur cette recommandation dans notre recherche (voir chapitre 3, § 2.4 et chapitres 4 et 5).

Duval (1995) propose le concept de registres de représentation sémiotique, que nous introduisons brièvement maintenant.

Registres de représentation sémiotique

Le concept de registres de représentation sémiotique développé par Duval (1995) se différencie du concept de cadre introduit par Douady : un même registre peut être utilisé dans différents cadres, et un travail mathématique dans un cadre donné peut mettre en œuvre différents registres de représentation sémiotique. Ces derniers sont les registres des signes que nous utilisons pour désigner ou manipuler des objets (registres graphiques, verbaux, etc). Reprenant une idée de Granger (1979), Duval insiste sur le lien étroit unissant la *semiosis* à la *noésis* (l'ensemble des actes cognitifs de discrimination, de compréhension et d'inférence). Duval souligne toute l'importance des registres dans le fonctionnement cognitif. En effet, il estime que l'activité de *conversion* d'une représentation sémiotique d'un registre à l'autre est une des conditions essentielles de la conceptualisation.

A titre d'illustration, nous nous basons sur le travail de Pavlopoulou (1993) et d'Alvès-Diaz (1998), pour proposer, **pour les vecteurs**, les registres de représentation sémiotique suivants :

- le registre de représentation graphique : le vecteur est représenté par une flèche;
- le registre de l'écriture symbolique : le vecteur est représenté par une lettre (éventuellement surmontée d'une flèche) ou par une combinaison linéaire de lettres représentant d'autres vecteurs du même (sous-)espace;
- le registre de coordonnées : le vecteur est représenté par une matrice (éventuellement ligne ou colonne) correspondant à la représentation du vecteur par ses coordonnées dans un repère.
- le registre explicite : le vecteur est décrit explicitement. Par exemple, un élément de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}$ sera décrit comme $x = x_1 + ix_2$.

Au cours de ce chapitre, nous serons encore amenée à parler brièvement des registres de représentation sémiotique lorsque nous évoquerons les travaux d'Alvès-Diaz (1998) faisant référence à la dualité (voir § 3.2.c).

1.4. Praxéologies et niveaux de détermination (TAD)

Dans notre recherche, nous avons en particulier mobilisé un point de vue institutionnel, qui nous paraît particulièrement pertinent pour repérer les attentes spécifiques dans l'enseignement supérieur. Pour ce faire, nous nous sommes basée sur la théorie anthropologique du didactique (TAD, Chevallard 2007), et notamment sur ses développements récents à propos des niveaux de détermination didactique. La TAD éclaire notre recherche, étant donné que cette théorie adopte un point de vue institutionnel, en ce sens qu'elle considère que les pratiques relatives à un objet (mathématique ou autre) sont différentes d'une institution à une autre.

Rapport et ostensifs

Chevallard considère que les objets mathématiques, tels les fonctions ou les espaces vectoriels par exemple, ne peuvent pas « être possédés » par quelqu'un ou quelque chose (une institution par exemple). Par contre, on peut parler du *rapport* qu'une personne a à un objet ou du rapport qu'une personne x occupant la position p dans une institution I devrait avoir à l'objet o. On comprend bien que dans cette dernière phrase, toutes les lettres x, p, I, o ont leur importance et que le rapport considéré sera modifié si l'on change le représentant d'une de ces lettres. Ainsi par exemple, pour un même objet o (les fonctions par exemple), le rapport qu'un étudiant à l'université de Namur, x_1 , aura à l'objet mathématique o « fonction » ne sera pas le même que le rapport qu'un professeur de cette même université, x_2, aura à ce même objet o « fonction », la personne et la position n'étant pas la même par ailleurs. Et il faudrait encore préciser que l'Institution ici peut être plus spécifique car ce rapport ne sera vraisemblablement pas le même pour un professeur de la Faculté de Sciences Economiques que pour un professeur du département de mathématiques par exemple (bien que tous deux travaillant à l'université de Namur). Dans ce sens, on pourrait même dire qu'une Institution pourrait consister en une classe (c'est-à-dire un ensemble d'élèves et un professeur) bien déterminée.

Chevallard qualifie de *non-ostensif* l'objet o « qui ne peut être possédé par personne », en opposition aux *ostensifs* utilisés pour sa représentation. Ainsi, le non-ostensif « fonction » peut être représenté à travers les ostensifs « f », « $f : A \to B, a \mapsto f(a)$ », « sinus », ou à travers l'ostensif que représente le graphe d'une fonction réelle, ou encore la représentation ensembliste d'une fonction, etc.

Remarquons que les ostensifs peuvent être de nature orale, écrite, gestuelle ou consister en un autre objet matériel.

Rapport et praxéologies

Pour Chevallard, ce rapport qu'une personne a à un objet dans une institution donnée ne peut naître ou évoluer qu'à des travers des activités faisant intervenir cet objet. Il précise ce point de vue en introduisant les notions de *type de tâches*, de *technique*, de *technologie* et de *théorie* :

> Pour espérer observer la naissance ou l'évolution d'un rapport à un objet o, il faut, si je puis dire, observer l'individu x ou l'institution I « dans son rapport à o », dans les activités de x ou de sujets de I qui « activent » o. De là prirent progressivement forme les notions clés de *type de tâches*, de *technique*, de *technologie* et de *théorie*. (Chevallard 2007, p. 6).

Ainsi, dans une institution donnée, la TAD présente le savoir sous forme d'organisations mathématiques (appelées praxéologies), avec 4 composantes : type de tâches, technique, technologie, théorie. Ainsi, pour accomplir une tâche d'un certain type, une technique est utilisée ; et cette technique est justifiée par un discours, appelé technologie. Cette technologie est à son tour justifiée par une théorie.

Par exemple, pour accomplir une *tâche* du type « Déterminer si un ensemble de *n* vecteurs d'un espace vectoriel de dimension *n* en constitue une base », comme par exemple « Déterminer si l'ensemble des vecteurs $(1,2,3),(0,5,7),(10,6,0)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ », une *technique* consiste à résoudre un système homogène de trois équations à trois inconnues, où le coefficient de la $j^{\text{ème}}$ inconnue dans la $i^{\text{ème}}$ équation est la $i^{\text{ème}}$ composante du $j^{\text{ème}}$ vecteur donné (Figure 1-3). S'il y a une solution unique au système, l'ensemble de ces vecteurs constitue effectivement une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\begin{cases} \alpha_1 \qquad +10\alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 6\alpha_3 & = & 0 \\ 3\alpha_1 + 7\alpha_2 & = & 0 \end{cases}}$$

Figure 1-3 : Système homogène à résoudre dans l'exemple donné

Pour justifier cette *technique*, on utilise un discours : pour établir le système d'équations repris à la Figure 1-3, nous partons de la relation $\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i x_i = 0\right)$, où les x_i sont les vecteurs donnés dans l'énoncé de la tâche à accomplir. S'il y a une solution unique, comme il s'agit d'un système homogène, cela signifie que $\forall i = 1,...,3 : \alpha_i = 0$. Cela implique que la proposition $\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i x_i = 0\right) \Rightarrow (\forall i = 1,...,3 : \alpha_i = 0)$ est vraie ; ce qui signifie, par définition, que les vecteurs x_i sont linéairement indépendants. Or, dans un espace de dimension trois, trois vecteurs linéairement indépendants en constituent une base. Ce discours **sur** la *technique* est appelé la *technologie*. Cette *technologie* est à son tour justifiée par une *théorie* : la *technologie* énoncée ci-dessus est justifiée par la définition d'un ensemble de vecteurs linéairement indépendants, et par la démonstration de la propriété affirmant que dans un espace vectoriel de dimension *n* (en l'occurrence $\mathbb{R}^3$ de dimension 3), *n* vecteurs linéairement indépendants forment une base de cet espace. Ceci fait partie de la *théorie*. Elle justifie bien la *technologie* utilisée ci-avant.

Bien entendu, une autre technique aurait pu être utilisée pour mener à bien cette même tâche « Déterminer si l'ensemble des vecteurs $(1,2,3),(0,5,7),(10,6,0)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ » : il s'agit de vérifier si les vecteurs x_i donnés sont d'une part linéairement indépendants, et d'autre part générateurs de $\mathbb{R}^3$. Pour ce faire, il faut alors résoudre deux systèmes de trois équations à trois inconnues : le système homogène décrit dans la Figure 1-3, et un système non homogène dont seuls les seconds membres diffèrent de ceux de la Figure 1-3. Mais cette autre *technique*, pour être expliquée, nécessite à son tour l'emploi d'une *technologie*, qui permet d'interpréter les résultats trouvés lors de la résolution des systèmes d'équations linéaires. Enfin, cette *technologie* est elle-même justifiée par une *théorie* expliquant d'où viennent les expressions utilisées :

$\{x_i\}_{i=1}^3$ linéairement indépendants : $\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i x_i = 0\right) \Rightarrow \left(\forall i = 1,\ldots,3 : \alpha_i = 0\right)$ et

$\{x_i\}_{i=1}^3$ générateurs de $\mathbb{R}^3$: $\left(\forall v \in \mathbb{R}^3, \exists \alpha_i \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i x_i\right)$.

Il s'agit ici principalement de la définition d'une base d'un espace vectoriel qui est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants et générateurs de l'espace en question. C'est la *théorie* associée qui permet aussi par exemple d'expliquer que les α_i intervenant dans la définition du caractère générateur des x_i appartiennent au champ des scalaires ($\mathbb{R}$ en l'occurrence) sur lequel est construit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Remarquons que les deux techniques présentées ne sont pas les seules permettant de solutionner la tâche « Déterminer si l'ensemble des vecteurs $(1,2,3),(0,5,7),(10,6,0)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ ». Citons encore par exemple la *technique* qui consiste à résoudre le système « transposé » du système repris à la Figure 1-3 : il s'agit du système homogène à trois équations et trois inconnues, où le coefficient de la *i*ème inconnue dans la *j*ème équation est la *i*ème composante du *j*ème vecteur donné : $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 & = & 0 \\ \quad 5\alpha_2 + 7\alpha_3 & = & 0 \\ 10\alpha_1 + 6\alpha_2 & = & 0 \end{cases}$

S'il y a une solution unique au système, l'ensemble des vecteurs donnés dans l'énoncé de la tâche constitue effectivement une base de $\mathbb{R}^3$. La *technologie* et la *théorie* associées à cette *technique* fait intervenir la dualité algébrique. Il s'agit en fait de voir si la seule forme linéaire qui s'annule sur les trois vecteurs donnés est la forme nulle. Si c'est le cas, ces vecteurs constituent une base de $\mathbb{R}^3$. Nous ne développerons pas maintenant la *technologie* et la *théorie* associées à cette *technique*. Elles sont suggérées à la section 2 de ce chapitre.

Pour ne pas avoir l'ambiguïté du choix de techniques, il faudrait préciser davantage le type de tâches, et différencier par exemple le type de tâches T « Déterminer si un ensemble de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n en constitue une base », en T_1 « Déterminer si un ensemble de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n en constitue une base, en utilisant des propriétés du cours » et T_2 « Déterminer si un ensemble de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n en constitue une base, en vous basant sur la définition d'une base ». Bien entendu, la distinction peut être plus fine encore et aboutir à ce qu'un type de tâches soit associé à une seule technique. On est alors à un niveau d'un sujet bien particulier, dans des organisations mathématiques ponctuelles (nous reviendrons sur ces notions dans un instant). Remarquons que cet « affinage » des types de tâches est possible en théorie, mais qu'en pratique, certaines tâches pourront toujours être résolues au moyen de plusieurs techniques, sauf si la technique est précisée dans la description de la tâche à accomplir.

On note usuellement T le type de tâches, τ la technique, θ la technologie, et Θ la théorie. Comme nous l'avons vu ci-dessus, ces quatre éléments forment un tout, appelé organisation mathématique ou praxéologie : $[T,\tau,\theta,\Theta]$. Ici, le terme praxéologie n'est pas à prendre au sens étymologique (« l'étude (*-logie*) de la pratique humaine (*praxéo-*) »), mais bien comme la cohabitation de deux entités : *praxis* (pratique en grec) et *logos* (raison, discours raisonné en grec). En effet, on peut considérer que les deux premières parties d'une praxéologie $[T,\tau]$ forment une entité que l'on peut qualifier de *bloc practico-technique* (parfois simplement désigné comme « pratique ») regroupant un type de tâches et une technique associée, qui doivent être travaillées « en pratique ». On peut aussi noter $\Pi = [T, \tau]$. Les deux dernières composantes d'une praxéologie $[\theta, \Theta]$ forment elles aussi une entité, à laquelle on pourrait adjoindre l'adjectif théorique. Chevallard nomme cette association *bloc technologico-théorique,* et la note $\Lambda = [\theta, \Theta]$. Bien entendu, ce dernier bloc est indissociable du premier, étant donné que la technologie θ est le discours qui justifie la technique τ se trouvant dans le premier bloc. Ainsi, une praxéologie, ou organisation mathématique (puisque les savoirs visés sont ici mathématiques), est l'union de deux blocs, l'un practico-technique, l'autre technologico-théorique : $[\Pi, \Lambda] = [[T, \tau], [\theta, \Theta]]$. Cette décomposition nous sera utile, entre autres, dans la section 1.6, lorsque Winsløw parle de transitions en se basant sur les praxéologies.

Echelle des niveaux de co-détermination didactique

Nous devons encore préciser que les organisations mathématiques ainsi définies (praxéologies) sont présentes à différents niveaux, du plus général au plus spécifique, en ce qui concerne les contenus mathématiques en jeu. Ceci est conceptualisé par une échelle des niveaux de co-détermination didactique, reprise à la Figure 1-4.

Civilisation
$\Updownarrow$
Société
$\Updownarrow$
Ecole
$\Updownarrow$
Pédagogie
$\Updownarrow$
Discipline
$\Updownarrow$
Domaine
$\Updownarrow$
Secteur
$\Updownarrow$
Thème
$\Updownarrow$
Sujet

Figure 1-4: Echelle des niveaux de co-détermination didactique (Chevallard 2007)

Intéressons-nous à la moitié inférieure de cette échelle, et illustrons-la. On peut considérer, dans la *discipline* mathématique, que plusieurs *domaines* co-existent : l'arithmétique, l'algèbre, l'algèbre linéaire, l'algèbre non-linéaire, la géométrie euclidienne, les nombres complexes, etc. Pour un *domaine* donné, par exemple l'algèbre linéaire, plusieurs *secteurs* peuvent être définis : les espaces vectoriels, les applications linéaires, la dualité, etc. De même, un *secteur* peut être décomposé en plusieurs *thèmes* (on trouvera par exemple la structure de champ, ou les bases comme thèmes des espaces vectoriels), et un même *thème* pourra être composé de plusieurs *sujets* (dans le thème des bases, on retrouvera par exemple comme sujet la dépendance linéaire, etc).

On comprend bien que le découpage entre ces différents niveaux n'est pas univoque. Par exemple, les applications linéaires qui peuvent être considérées comme un secteur à part entière dans l'algèbre linéaire pourraient aussi être vues comme un thème ou un sujet du secteur des espaces vectoriels, étant donné que l'ensemble des applications linéaires, munis des lois adéquates, peut être considéré comme un espace vectoriel, et en constitue donc un exemple. Nous considérons cependant les applications linéaires comme un secteur d'algèbre linéaire ; mais nous nous souviendrons que la difficulté qu'il peut y avoir à classer certaines notions peut aussi être source de difficulté auprès des étudiants lorsque, considérant un certain concept, on est amené à passer d'un secteur à l'autre dans un même domaine (voir chapitre 4).

Il est évident, nous l'avons déjà évoqué plus haut lors de la présentation des types de tâches, que ces derniers ne sont pas tous du même niveau. On dira que le type de tâches « trouver les solutions d'une équation du second degré » par exemple relève du thème équations du second degré du domaine d'algèbre. Par contre, le type de tâches « trouver les solutions d'une équation du second degré dont la factorisation est possible au moyen de formules d'un produit remarquable » relève d'un niveau plus spécifique, positionné plus bas dans l'échelle des niveaux de co-détermination didactique (Figure 1-4) : au niveau du sujet. Ainsi, on peut dire que les organisations mathématiques (OM) ou praxéologies sont présentes à différents niveaux, du plus général au plus spécifique, en ce qui concerne les contenus mathématiques en jeu. On parle alors :

- d'organisations mathématiques (ou praxéologies) *ponctuelles* lorsqu'elles se situent au niveau d'un *sujet*. En nous rappelant les réserves évoquées à la section « Rapport et praxéologies » (§ 1.4), on peut alors supposer que la spécificité est telle qu'à un type de tâches déterminé est associée une seule technique ;
- d'organisations mathématiques *locales* lorsque le savoir visé correspond à un *thème* dans l'échelle des niveaux de co-détermination didactique. Il s'agit en fait de l'ensemble des praxéologies ponctuelles rassemblées autour des différentes technologies mettant en œuvre le *thème* correspondant au savoir visé. On peut écrire, en reprenant les notations de Chevallard (2007, p.10), qu'une OM locale équivaut à $\sum_i \left[T_i / \tau_i / \theta / \Theta\right]$;
- d'organisations mathématiques *régionales* lorsqu'elles concernent un *secteur* déterminé. Il s'agit donc de l'ensemble des organisations mathématiques regroupées autour d'une même théorie concernant le *secteur* concerné. On peut écrire qu'une OM régionale équivaut à $\sum_{i,j} \left[T_{ij} / \tau_{ij} / \theta_i / \Theta\right]$ (Chevallard 2007, p.10).

Les différentes organisations mathématiques régionales sont quant à elles inter-reliées lorsque l'on considère un *domaine* spécifique dans son ensemble.

Le schéma suivant (Figure 1-5), fourni par Bosch & Gascón (2003), résume ces propos.

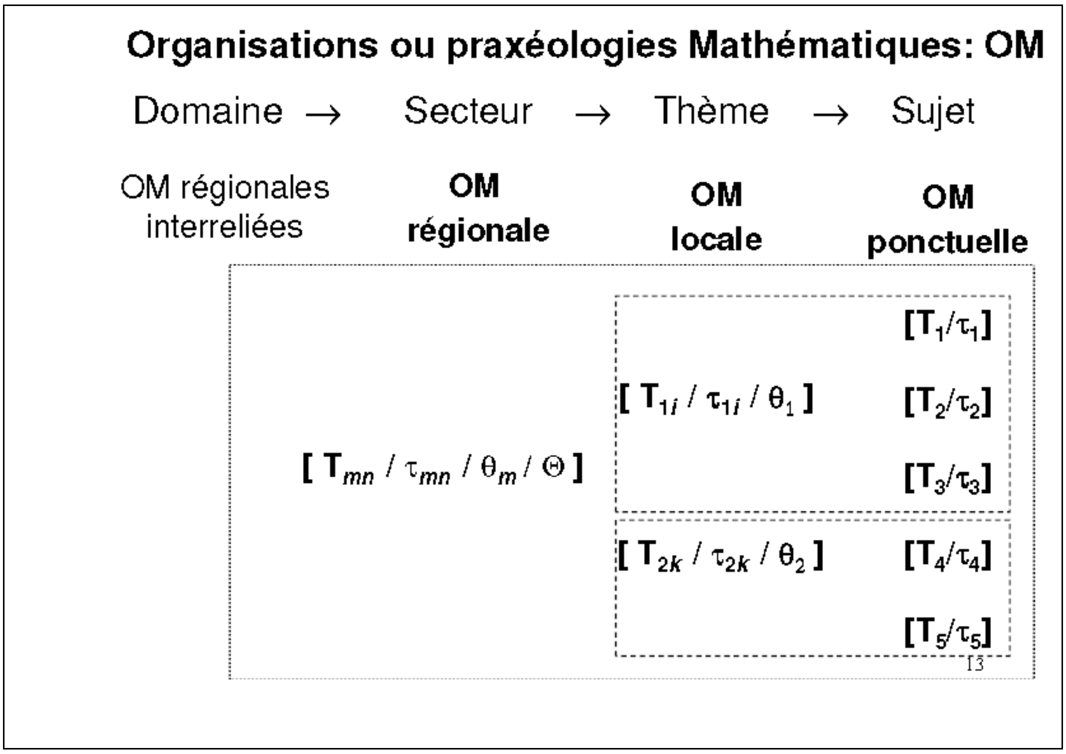


Figure 1-5 : Praxéologies (OM) à différents niveaux

L'échelle des niveaux de co-détermination didactique établie par Chevallard nous permet de proposer une structuration de la dualité (§ 2). Les praxéologies associées sont analysées au chapitre 3, aux différents niveaux. De plus, les praxéologies sont mobilisées dans un cadre théorique proposé par Winsløw (§ 1.6) que nous utilisons dans l'analyse des difficultés des étudiants en apprentissage de la dualité (chapitre 4).

1.5. Contrat didactique, contrat institutionnel

Nous l'avons explicité dans la section 1.1 en début de ce chapitre, les difficultés rencontrées dans les enseignements de mathématiques par les étudiants entrant dans l'enseignement supérieur peuvent être vues et interprétées avec différents regards (Artigue 2006, Gueudet 2008). Certains chercheurs en didactique des mathématiques (Praslon 2000, Artigue 2004, Bosch *et al*. 2004) se centrent ainsi sur les phénomènes liés au changement d'institution (Chevallard 2007). En effet, les difficultés ne proviennent pas seulement du fait que de nouveaux savoirs sont rencontrés. Elles peuvent être causées par le fait qu'un même savoir sera abordé différemment dans l'institution enseignement secondaire et dans l'institution enseignement supérieur. Ainsi un même type de tâche pourra être effectué avec une nouvelle technique; une même technique sera justifiée différemment. On peut considérer plus généralement que l'entrée à l'université signifie, pour un savoir donné, l'entrée dans un nouveau contrat didactique institutionnel.

Le concept de *contrat didactique* détermine ce que, par rapport à un savoir particulier, chaque partenaire (enseignant et enseigné) a la responsabilité de gérer, et dont il sera responsable devant l'autre (Brousseau 1998). Le concept de *contrat institutionnel* relatif à un objet de savoir, présent dans une institution donnée, est défini par Chevallard (1989) comme le système des rapports institutionnels à l'objet de savoir. Ainsi, le contrat didactique est l'instanciation dans la classe du contrat institutionnel. L'institution université conditionne la manière dont les savoirs sont présentés. Nous parlons donc de *contrat didactique institutionnel*.

Nous proposons de *définir* différents niveaux de contrat, ces derniers étant directement reliés aux niveaux de co-détermination didactiques établis par Chevallard (§ 1.4). En effet, en changeant d'institution, les praxéologies rencontrées sont également modifiées, et cela à différents niveaux de détermination didactique. Nous abordons ici les niveaux définis par l'*école*, la *discipline* et ce que nous nommons un « contenu particulier », correspondant aux niveaux du *thème* et du *sujet.*

Ainsi, en nous plaçant au niveau de l'*école*, avant même de parler de contrat *didactique* institutionnel, nous pouvons déjà parler de contrat institutionnel (Chevallard 1989), indépendamment de tout savoir en jeu. Il s'agit déjà là d'un premier niveau de contrat, que l'on peut nommer contrat institutionnel *générique* ou contrat pédagogique (Sarrazy 1995). En effet, le contrat en vigueur dans l'institution université est différent du contrat en vigueur dans l'enseignement secondaire. Par exemple, la présence au cours n'est plus obligatoire, la responsabilité de la prise des notes est entièrement dévolue aux étudiants, des interrogations certificatives ne sont généralement pas organisées pendant la période d'enseignement d'un cours, etc. Tous ces changements peuvent effectivement susciter des difficultés d'adaptation auprès de certains étudiants. Précisons déjà qu'à ce premier niveau de contrat, si des éléments peuvent être explicités, d'autres n'en restent pas moins implicites. Nous reviendrons sur cette notion d'implicite inhérente à la notion de contrat didactique (Brousseau 1998) après avoir défini les autres niveaux que nous nous proposons d'introduire.

A coté de ce premier niveau de contrat institutionnel, nous pouvons, lorsque nous parlons de contrat *didactique* institutionnel (c'est-à-dire lorsqu'un savoir est visé), encore percevoir deux niveaux :

- **Le niveau de la discipline** (mathématique, physique, chimie, etc). En mathématiques par exemple, quel que soit le secteur abordé, un langage formel est systématiquement utilisé à l'université ; ce n'est pas nécessairement le cas dans l'enseignement secondaire. De plus, la responsabilité de l'étudiant par rapport au savoir mathématique se modifie à l'université : les énoncés sont non répétitifs, moins directifs, etc. L'institution universitaire a de nouvelles attentes, en termes de responsabilités de l'étudiant vis-à-vis du savoir mathématique en jeu. Celui-ci doit d'une part questionner les textes mathématiques qui lui sont proposés, le texte du cours en particulier. Selon Dreyfus (1999), il s'agit pour l'étudiant de changer d'attitude, pour passer d'un questionnement du type « Quel est le résultat ? » à « Est-il vrai que… ? ». Par ailleurs l'étudiant doit apprendre à développer une véritable autonomie mathématique, pour aborder des problèmes nouveaux, dans lesquels il est nécessaire de prendre des initiatives et non d'appliquer une méthode apprise.
- **Le niveau d'un contenu particulier**. En prenant les vecteurs par exemple, on s'aperçoit que dans l'enseignement secondaire, ils sont principalement vus comme vecteurs géométriques (Hillel 1997, p.236), alors que dans un cours d'algèbre linéaire, ils sont présentés comme des objets abstraits, faisant partie d'une structure algébrique bien définie qu'est un espace vectoriel. En prenant l'exemple des fonctions, on s'aperçoit que l'institution secondaire met en avant des fonctions standards à connaître, alors que les fonctions sont davantage vues à travers leurs propriétés à l'université (Praslon 2000).

L'étudiant entrant dans l'institution université n'est pas nécessairement préparé à ce changement de contrats. Les difficultés rencontrées par les étudiants sont renforcées par le fait que, s'il est possible d'expliciter une partie du contrat institutionnel aux différents niveaux, il n'en reste pas moins qu'une part de ces contrats reste implicite (Brousseau 1998). Et la part d'implicite sera d'autant plus importante qu'on se situe à un niveau *fin* du contrat didactique institutionnel, la *finesse* du contrat étant déterminée par la position du niveau associé sur l'échelle de co-détermination didactique de Chevallard (2007). En effet, s'il est possible de rendre explicites les conditions d'un examen (part de la note associée à la théorie, aux exercices ou à la remise de travaux), il est plus difficile d'expliciter les attentes de l'institution lorsqu'un contenu particulier est abordé.

Nous avons déjà cité, à la section 1.1, les constations faites par Praslon (2000) concernant les modifications du contrat didactique institutionnel dans le cadre de l'analyse, lors du passage du secondaire à l'université. Bloch & Ghedamsi (2004) ont poursuivi cette réflexion en identifiant des variables permettant de déterminer le contrat en place dans les institutions concernées par la transition : autonomie, degré de formalisation, mode d'intervention de la notion, etc. En identifiant ainsi les différences entre les contrats en vigueur dans les institutions concernées par la transition, Bloch (2000) identifie non seulement des difficultés éventuelles, mais propose des pistes pour améliorer la situation dans le domaine de l'analyse, en agissant dès le secondaire. Mais des pistes pour aider les étudiants à entrer dans les différents niveaux de contrat sont également envisageables dans l'institution université : nous présentons, au chapitre 5, section 2, un dispositif permettant d'apporter des éléments en ce sens. Pour plus de renseignements, le lecteur pourra se référer à (De Vleeschouwer 2008).

1.6. Transitions selon Winsløw

Se basant sur les praxéologies définies par Chevallard, Winsløw présente un cadre théorique permettant d'expliquer que des types de transitions existent aussi à l'intérieur de l'institution université.

Winsløw considère qu'à l'arrivée dans l'institution université, l'étudiant est confronté (au moins !) à deux types de transition. Se basant sur les praxéologies $[\Pi,\Lambda]=[[T,\tau],[\theta,\Theta]]$ (Chevallard 2007), Winsløw estime qu'en simplifiant les choses, on peut considérer que dans l'enseignement secondaire, la technologie θ est souvent réduite à une simple description des techniques, et ne correspond pas vraiment, du moins pour l'élève, à un discours sur la technique ; discours qui y est souvent laissé à la charge du professeur. Ainsi peut-on dire que dans cette institution, le bloc technologico-théorique Λ n'est pratiquement pas présent, du moins dans le topos de l'élève, Chevallard définissant le topos de l'étudiant ou de l'élève comme étant l'ensemble des gestes d'étude que celui-ci aura à accomplir en autonomie didactique (Chevallard 2002, p.9). Les organisations mathématiques (praxéologies) y sont donc souvent incomplètes, puisque, en caricaturant légèrement, elles se résument pour l'élève à la reconnaissance de types de tâches, et ensuite à l'identification et l'application d'une technique appropriée.

Par contre, dès son entrée dans l'institution université, l'étudiant est généralement confronté, en mathématiques, à des praxéologies complètes, où le bloc technologico-théorique Λ est associé au bloc practico-technique Π. En effet, un langage et des définitions formelles sont adoptées, des démonstrations sont régulièrement présentées, etc. Et non seulement l'étudiant est maintenant en face de praxéologies complètes, mais en plus les différentes praxéologies sont davantage structurées entre elles qu'elles ne l'étaient dans l'institution secondaire. Ces différences constituent pour Winsløw un premier type de transition auquel l'étudiant entrant à l'université est confronté.

Bien entendu, nous caricaturons légèrement la situation en présentant ce premier type de transition comme correspondant à l'entrée à l'université. Nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre (§ 1.1), la transition est un phénomène relativement étalé dans le temps, et il est tout à fait probable qu'un étudiant qui abordera un cours de mathématique à l'université, aura déjà été confronté, en sortant du secondaire, à des définitions formelles ou des démonstrations. Mais dans le secondaire, cet apport du bloc technologico-théorique n'est certes pas systématisé comme à l'université.

Mais, alors que tous les étudiants ne se sont peut-être (ou certainement ?) pas encore adaptés à ce premier type de transition, Winsløw annonce qu'une deuxième transition survient très rapidement : les éléments nouvellement introduits qui intervenaient dans des blocs technologico-théoriques Λ_1 (des concepts, des définitions, des démonstrations, etc.) vont maintenant constituer des éléments sur lesquels des types de tâches et des techniques vont être développés ; autrement dit, des éléments de blocs technologico-théoriques Λ_1 qui complétaient les praxéologies dès l'entrée à l'université constituent maintenant les éléments de blocs practico-technique Π_2 de nouvelles praxéologies, qui sont à leur tour complétées par un nouveau bloc technologico-théoriques Λ_2. Ainsi, par exemple, les démonstrations ne sont plus simplement données par le professeur comme constituant d'une théorie Θ, mais elles deviendront des objets que l'on demande aux étudiants de construire (ce qui constitue un type de tâches particulier). De plus, ce nouveau type de construction des praxéologies est susceptible de se reproduire dans le parcours de l'étudiant. C'est ce que schématise la Figure 1-6 :

$$
\begin{array}{ccl}
 & \text{transition } 1^{\text{er}} \text{ type} & \\
[\Pi_1] & \rightarrow & [\Pi_1, \Lambda_1] \\
 & & \swarrow \text{ transition } 2^{\text{ème}} \text{ type} \\
 & & [\Pi_2, \Lambda_2] \\
 & & \swarrow \text{ transition } 2^{\text{ème}} \text{ type} \\
 & & \ldots
\end{array}
$$

Figure 1-6 : Deux types de transition selon Winslow (2008)

Enfin, Winsløw montre que les objets (non-ostensifs) intervenant dans un bloc practico-technique Π_2 provenant d'un bloc technologico-théorique Λ_1 ne disposent plus guère d'une variété de représentations (ostentifs). Une fonction issue d'un bloc technologico-théorique Λ_1 par exemple, n'est plus guère représentée que par l'ostensif « *f* » ou « *g* ».

On peut ainsi se demander si les deux types de transitions sont présents dans l'apprentissage de la dualité en algèbre linéaire à l'université.

1.7. Articulations entre les cadres théoriques présentés

Le lien entre le cadre théorique concernant les transitions présenté par Winsløw et la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 2007) est explicite (§ 1.6). Cependant des articulations existent également entre des cadres présentés dans cette section (§ 1) qui ne réfèrent pas explicitement les uns aux autres. Nous présentons ici ces articulations.

Différentes perspectives sur l'objet

On peut tout d'abord constater que les différents cadres théoriques présentés (APOS, TAD, Douady) comportent la notion d' « objet ». Selon le cadre théorique auquel on se réfère, cette notion est abordée sous différentes perspectives, que nous tentons d'expliciter maintenant.

Dans la dialectique outil-*objet*, Douady adopte un point de vue *épistémologique* pour la notion d'objet, étant donné qu'ici l'objet est un savoir qui est d'abord intervenu comme outil conceptuel, mis au jour par les mathématiciens professionnels, puis décontextualisé et incorporé à un corpus de savoirs. Il s'agit donc d'un point de vue épistémologique sur l'objet.

Dans la théorie APOS, un Objet est une construction *cognitive* d'un sujet. Deux manières sont possibles pour qu'un Objet mathématique puisse apparaître ou évoluer *chez un individu* : en encapsulant un Processus, ou en thématisant un Schéma (voir § 1.2).

Dans la TAD, qui sert aussi de base au cadre proposé par Winsløw, tout peut être considéré comme « objet », et un objet de savoir (non-ostensif) n'existe que parce que quelqu'un (dans une position *p* à l'intérieur d'une institution) ou qu'une institution a un rapport à cet objet, ce qui correspond au point de vue *institutionnel* adopté par la TAD.

L'*objet* de savoir dont parle Chevallard (2007) dans la TAD ne correspond pas totalement au terme « objet » utilisé par Douady (1986) dans la présentation de la dialectique outil-objet. De même, dans la théorie APOS (Dubinsky & Mc Donald 2001), l'Objet représenté par le « O » contenu dans l'acronyme n'est pas exactement le même que celui de Douady ou de Chevallard. Les points de vue étant différents dans ces trois approches, il est normal qu'un même terme, « objet » en l'occurrence, ne soit pas perçu de manière identique dans ces cadres, mais que **des concordances existent**, que celles-ci s'expriment en termes d'*opposition* ou d'*évolution*. En effet, dans le cadre de la théorie APOS ou dans le cadre proposé par Doudy, on constate que l'objet se positionne *en opposition* à autre chose : l'objet s'oppose à l'outil dans le cadre de Douady, et il s'oppose au Processus dans le cadre d'APOS. Dans ces cadres, l'objet est donc considéré comme quelque chose de statique, en opposition à une entité dynamique. Mais cette statique n'est apparue qu'à la suite d'une certaine *évolution* : on peut en effet dire que l'objet considéré par Douady est issu d'une évolution historique et que l'Objet de la théorie APOS est le fruit d'une évolution cognitive chez un sujet. Dans la TAD, le point de vue institutionnel adopté ne prend pas en compte explicitement une notion d'évolution puisqu'il considère qu'un « objet » existe parce qu'il est reconnu dans une institution. Cependant, Winsløw introduit un point de vue évolutif dans son cadre théorique (sur les transitions) basé sur la TAD : il y a une évolution lors d'un changement d'institution (premier type de transition décrit par Winsløw) ou à l'intérieur même d'une institution (deuxième type de transition).

Remarquons que nous pouvons aussi percevoir une certaine *articulation* des différentes perspectives adoptées à l'intérieur même des cadres théoriques présentés. Ainsi par exemple, alors que la théorie APOS adopte clairement un point de vue cognitif, une composante épistémologique y est aussi présente, étant donné que cette théorie s'appuie sur une analyse épistémologique du concept à apprendre afin d'établir la décomposition génétique du concept en question dans le but de préparer les Actions qui engageront les

Processus qui seront encapsulés en Objets. Ainsi, le point de vue épistémologique présent dans la dialectique outil-objet (Douady 1986) est aussi présent dans la théorie APOS. Un autre exemple d'articulation entre les perspectives présentées est fourni par le fait que la TAD, qui permet d'aborder les difficultés liées à la transition en termes de discontinuités entre rapports institutionnels, et non en termes de difficultés cognitives des élèves (Artigue 2009), a cependant introduit la notion de rapport au savoir *d'un individu* (dans une position *p* à l'intérieur d'une institution). Une composante cognitive est donc aussi perceptible dans la TAD.

Perspectives sur les apprentissages des étudiants

La manière dont les étudiants apprennent est perçue différemment selon les points de vue adoptés dans les divers cadres théoriques présentés. Ainsi, pour Douady, les étudiants apprennent s'ils sont confrontés à une nécessité de flexibilité outil-objet ; ils apprennent au terme d'une évolution explicite décrite dans le canevas de la théorie d'APOS. Dans le cadre de la TAD, les étudiants sont confrontés à une nécessité de flexibilité entre praxéologies existant à différents niveaux. Mais la manière dont les étudiants apprennent n'est pas décrite explicitement dans ce cadre théorique. Nous laissons volontairement cette perspective en suspens pour le moment ; nous y reviendrons plus loin dans notre travail.

Après avoir présenté des cadres théoriques pour penser la transition secondaire-supérieur (§ 1), et avant de présenter des travaux didactiques reliés à l'algèbre linéaire (§ 3), nous proposons de donner une description du secteur dualité qui s'appuie sur l'échelle des niveaux de co-détermination didactique présentée à la Figure 1-4. En effet, certains thèmes et sujets que nous présentons dans la description du secteur dualité sont mobilisés dans la section 3.

2. Description du secteur dualité

Selon l'échelle des niveaux de co-détermination didactique (Chevallard 2007), nous pouvons dire que, dans le *domaine* de l'algèbre linéaire de la *discipline* mathématique, nous nous intéressons particulièrement au *secteur* de la dualité. Nous présentons donc ici la description du secteur dualité, en le décomposant en *thèmes* et *sujets*. Pour ce faire, nous avons analysé la partie traitant de dualité présente dans différents manuels analysés (voir chapitre 3). Ont été retenus comme thèmes les notions, en rapport avec la dualité, qui étaient reprises comme titre de chapitre, de section ou de sous-section dans au moins deux manuels analysés. Selon les critères présentés, nous avons donc retenu comme *thèmes* du secteur dualité : l'espace vectoriel dual, les formes linéaires, les bases duales, l'application transposée, les annulateurs. Nous les décrivons ci-après (§ 2.1 $\rightarrow$ 2.5).

Pour déterminer les *sujets* du secteur dualité, nous avons examiné, dans les différents manuels consultés, les notions présentes dans les différents chapitres ou sections en rapport avec la dualité. N'ont cependant pas été retenus en qualité de sujet de la dualité les notions élémentaires de l'algèbre linéaire, telles que dépendance ou indépendance linéaire, combinaison linéaire, base, etc.

Il va sans dire que la frontière entre les différents thèmes n'est pas clairement définie. Les hyperplans par exemple constituent à la fois un sujet du thème « les formes linéaires » (§ 2.2) et un sujet du thème « les annulateurs » (§ 2.5). De même, la distinction entre thème et sujet a été faite selon le critère objectif présenté ci-avant, mais nous restons bien consciente que d'autres critères auraient pu être choisis pour la distinction. Citons par exemple la possibilité de mettre les hyperplans comme *thème* de la dualité, plutôt que comme *sujet* dépendant du thème « les formes linéaires » ou « les annulateurs ». En effet, le critère de la présence d'un point de vue géométrique aurait pu être choisi comme critère discriminant.

Nous décrivons maintenant les cinq thèmes retenus pour le secteur dualité.

2.1. Le dual

Quelques rappels mathématiques :

> Etant donné un espace vectoriel E de dimension n construit sur un champ K, on définit son dual E' comme étant l'ensemble des applications linéaires définies sur E et à valeur dans K : $E' = \{y : E \to K : y \text{ est linéaire }\}$. De telles applications sont appelées formes linéaires. On montre que E', muni des lois d'addition (1) et de multiplication par un scalaire (2) est un espace vectoriel de dimension n, construit sur K.
>
> $$\forall y_1, y_2 \in E' : y_1 + y_2 \in E' \text{ et } \forall x \in E : (y_1 + y_2)(x) = y_1(x) + y_2(x) \qquad (1)$$
>
> $$\forall y \in E', \forall \alpha \in K : \alpha y \in E' \text{ et } \forall x \in E : (\alpha y)(x) = \alpha . y(x) \qquad (2)$$
>
> Lorsqu'on considère le dual E', l'espace vectoriel E est parfois appelé l'espace primal ou plus simplement le primal. Comme l'espace dual E' est un espace vectoriel, on peut bien entendu en prendre le dual et obtenir ainsi le bidual E'' de E.
>
> Certains auteurs utilisent la notation E^* pour désigner l'espace dual d'un espace vectoriel E, que nous avons choisi de noter E'.

Bien entendu, on retrouve le terme "dual" ou "dualité" dans tous les titres de chapitre ou de section des manuels analysés (hormis l'ouvrage d'Uhlig (2002), voir chapitre 3).

Ce premier thème, intitulé "le dual" aurait dû s'appeler, pour être plus explicite, "le dual considéré en tant qu'espace vectoriel". Le lecteur comprendra que pour des raisons d'économie d'écriture, "le dual" a été retenu comme dénomination pour ce thème; mais il gardera en mémoire ce que cette appellation représente effectivement.

Ainsi, on trouvera sous ce thème le fait que l'ensemble des formes linéaires, muni des lois (1) et (2) constitue un espace vectoriel, le fait que l'on peut ainsi considérer le dual du dual pour former le bidual (qui sera alors étudié en tant que sujet), ou encore le fait qu'il y ait, en dimension finie, un isomorphisme entre le primal et son dual, et même un isomorphisme naturel entre le primal et son bidual, qui est précisé dans le théorème de réflexivité :

> Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour toute forme linéaire z définie sur E' (c'est-à-dire $\forall z \in E''$), il existe un vecteur unique x dans E ($\exists! x \in E$) tel que $\forall y \in E'$: $z(y) = y(x)$. De plus, la correspondance ainsi définie entre x et z est un isomorphisme.

Figure 1-7 : Théorème de réflexivité

L'application transposée, que nous avons catégorisée comme thème pourrait aussi être considérée comme un sujet de ce thème.

Le produit tensoriel pourrait intervenir comme sujet de ce thème, si l'on définit le produit tensoriel $U \otimes V$ de deux espaces vectoriels de dimension finie (définis sur le même champ) comme le dual de l'espace vectoriel des formes bilinéaires définies sur $U \oplus V$: pour chaque x dans U et y dans V, le produit tensoriel de x et de y, $z = x \otimes y$, est l'élément de $U \otimes V$ définit par $z(w) = w(x, y)$ pour chaque forme bilinéaire w (Halmos 1974, p.40).

2.2. Les formes linéaires

On retrouve les formes linéaires en titre de section ou de sous-section dans différents manuels analysés, tels (Toint 2007), (Grifone 2002), (Esofier 2006), (Merlin 1995), etc.

Dans (Toint 2007), le dual est même une sous-section de la section *formes linéaires*. Comme quoi la séparation entre les différents thèmes n'est évidemment pas nette!

Sous ce thème, on retrouvera, entre autres :

- la notation du crochet de dualité : si $x \in E, y \in E'$, on adopte la notation suivante, utilisant les crochets de dualité « [,] » : $y(x) \overset{not.}{=} [x, y]$, ou parfois $[x, y]_{ExE'}$ pour préciser les espaces dont on parle. Remarquons que certains auteurs utilisent la notation suivante : $y(x) \overset{not.}{=} < x, y >$ avec $x \in E$ et $y \in E'$. Dans nos travaux, nous préférons réserver la notation « < , > » pour le produit scalaire.
- le théorème de Riesz, dans l'expression duquel nous avons adopté les conventions définies : « [,] » pour les crochets de dualité, « < , > » pour le produit scalaire.

A toute forme linéaire *y* d'un espace **métrique** *E* de dimension finie, il existe un vecteur *v* unique dans *E* tel que, pour tout *x* dans *E*, $[x, y] \overset{not.}{=} y(x) = \; < x, v >$

Figure 1-8 : Théorème de Riesz

- l'expression générale (analytique) d'une forme linéaire : on montre que toute forme linéaire $y \in E'$ est telle que $\forall x \in E : y(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, où *n* est la dimension de *E* (et de *E'*), les x_i $(i = 1, ..., n)$ sont les coordonnées du vecteur *x* dans la base canonique de *E* et les α_i $(i = 1, ..., n)$ sont les coordonnées de la forme linéaire *y* dans la base canonique de *E'*.

  Remarquons que l'expression analytique ainsi définie se rapproche fortement du résultat présent dans le théorème de Riesz. Mais ce théorème suppose l'existence d'une métrique.
- la notion de liste ***w*** de *m* vecteurs de *E* (espace vectoriel) en escalier pour une base de *E'*. Cette notion est présentée par Mac Lane & Birkhoff (1971, p.283). Elle fait appel préalablement à une autre notion que nous présentons aussi ici :
  - Une liste ***w*** de *m* vecteurs de *E* est standardisée pour une forme linéaire $y \in E'$ si l'on a : soit $y(w_1) = y(w_2) = ... = y(w_m) = 0,$
    soit $y(w_1) = 1$ et $y(w_2) = ... = y(w_m) = 0.$
  - On peut alors définir ce qu'est une liste ***w*** de *m* vecteurs de *E* (espace vectoriel) en escalier pour une base $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ de *E'* : il faut et il suffit que :

    (i) la liste ***w*** est standardisée pour y_1 ;

    (ii) la partie de la liste ***w*** contenue dans le noyau de y_1, noté $\mathrm{Ker}(y_1)$, est standardisée pour y_2 ;

    (iii) et pour tout i $(i = 3, ..., n)$:

    la partie de la liste ***w*** contenue dans $\mathrm{Ker}(y_1) \cap \mathrm{Ker}(y_2) \cap ... \cap \mathrm{Ker}(y_{i-1})$ est standardisée pour y_i.

On peut comprendre que ces notions seront utilisées pour obtenir des matrices échelonnées.

- la notion d'hyperplan : un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension n est un sous-espace vectoriel de dimension (n-1). On peut effectivement identifier un hyperplan au noyau d'une forme linéaire y (voir § 2.5), c'est-à-dire à l'ensemble des éléments de E tels que leur image par la forme linéaire y donne zéro, c'est-à-dire $\{x \in E : y(x) = 0\}$.

  Remarquons que les deux derniers sujets présentés ici auraient aussi tout-à-fait leur place dans le thème des annulateurs (§ 2.5).
- les notions habituellement liées au concept d'application linéaire, tels le rang, les matrices, etc.
- les notions dérivant des formes linéaires telles les formes bilinéaires, les k-formes, etc.

2.3. Les bases duales

Rappelons que, étant donnée une base $\{b_i\}_{i=1}^n$ d'un espace vectoriel E de dimension n, on définit sa base duale comme étant la base $\{y_i\}_{i=1}^n$ de E' vérifiant $y_i(b_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, ..., n)$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, qui vaut un si $i = j$ et qui vaut zéro si $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \quad \text{si } i = j \\ &= 0 \quad \text{si } i \neq j \end{aligned}$$

Le thème « bases duales » est repris dans tous les manuels analysés (à l'exception de celui d'Uhlig, 2002), même si certains auteurs, tels Pham & Dillinger (1996), n'utilisent pas le terme de base duale mais préfèrent parler de "systèmes de coordonnées". En effet, on montre que, si $\{y_i\}_{i=1}^n$ est la base duale d'une base $\{b_i\}_{i=1}^n$ d'un espace vectoriel E, alors pour tout $x \in E$, $y_i(x)$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de x dans la base $\{b_i\}_{i=1}^n$. D'où le nom de "coordinate functions" utilisé par exemple par Lang (1987).

Le thème « bases duales » est évidemment extrêmement lié aux deux premiers thèmes présentés ci-avant, étant donné qu'une base duale est une *des* bases de l'espace vectoriel dual et que les éléments d'une base duale sont des formes linéaires. Les sujets que l'on rencontre sous ces thèmes sont donc proches, avec cependant certaines particularités. Parmi celles-ci, citons par exemple les *bases conjuguées* et les caractères *covariant et contravariant* qui seront présents (Halmos 1974).

Rappelons brièvement les liens entre ces notions. La base conjuguée $\{c_i\}_{i=1}^n$ d'une base $\{b_i\}_{i=1}^n$ d'un espace vectoriel E est constituée des vecteurs correspondant, par le théorème de Riesz (voir Figure 1-8), aux formes linéaires de la base duale $\{y_i\}_{i=1}^n$ de la base $\{b_i\}_{i=1}^n$. Ainsi, si les formes linéaires y_i de la base duale d'une base $\{b_i\}_{i=1}^n$ appartiennent au dual, les vecteurs v_i de la base conjuguée d'une base $\{b_i\}_{i=1}^n$ appartiennent au primal, mais grâce au théorème de Riesz, on a l'égalité suivante : $\forall x \in E : y_i(x) \overset{not.}{=} [x, y_i] = \ < x, c_i >$, où « <.,.> » représente le produit scalaire (métrique).

De plus, si un vecteur *v* de *E* se décompose dans la base $\{b_i\}_{i=1}^n$ de *E* en $v=\sum_{i=1}^n v_i b_i$, on dira que les scalaires $v_i\,(i=1,\ldots,n)$ sont les coordonnées *contravariantes* de *v*. Or, à ce même vecteur *v*, on peut associer par le théorème de Riesz, une forme linéaire *f*, qui appartient au dual *E'*, telle que $\forall x\in E:\ <x,v>\ =[x,\ f]\overset{not.}{=} f(x)$ (voir Figure 1-8). Cette forme linéaire *f*, associée au vecteur *v* par le théorème de Riesz, se décompose à son tour dans $\{y_i\}_{i=1}^n$, la base duale de $\{b_i\}_{i=1}^n$: $f=\sum_{i=1}^n f_i y_i$. Les scalaires $f_i\,(i=1,\ldots,n)$ ainsi obtenus sont en fait les coordonnées *covariantes* de *v*.

2.4. L'application transposée

Rappelons que si *f* est une application linéaire d'un espace vectoriel *E* vers un espace vectoriel *F*, l'application transposée de *f*, notée f^t, est une application linéaire de *F'* (dual de *F*) vers *E'* (dual de *E*) qui est telle que $\forall x\in E, \forall y\in E':(f^t(y))(x)=y(f(x))$, ou, en utilisant la notation des crochets de dualité : $\forall x\in E, \forall y\in E':[x,\ f^t(y)]=[f(x),\ y]$. C'est ce que décrit le schéma suivant :

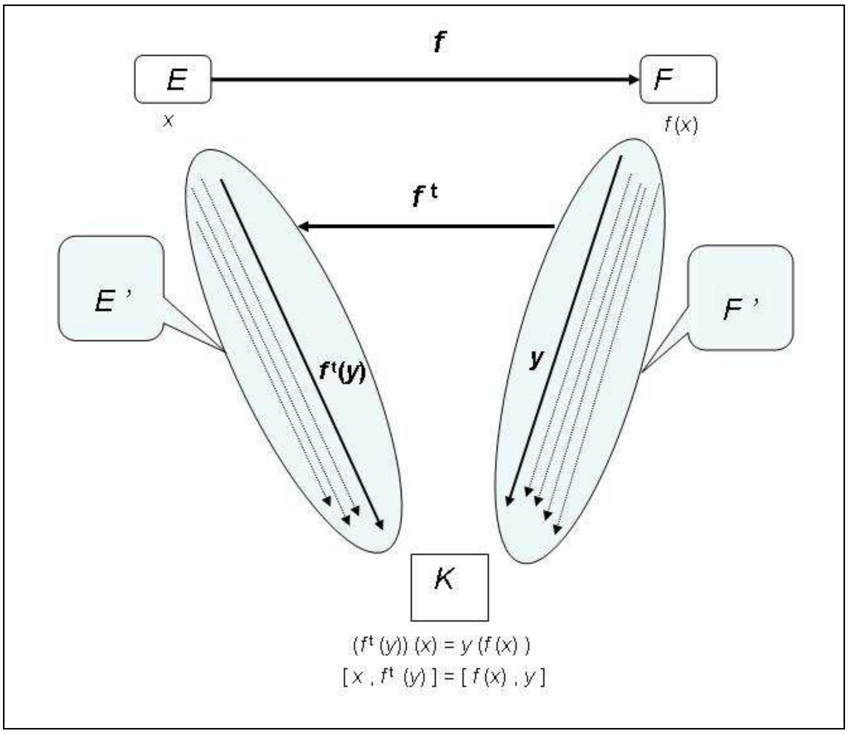


Figure 1-9. Représentation de l'application transposée

De plus, si *A* est la matrice représentant l'application linéaire *f* par rapport à une base $B=\{b_i\}_{i=1}^n$ de *E* et $D=\{d_i\}_{i=1}^m$ de *F*, c'est-à-dire $A=[f]_B^D$, on montre que la matrice représentant f^t par rapport à la base duale de *D* (qui est une base de *F'*) et la base duale de *B* (qui est une base de *E'*) est la transposée de la matrice *A*, c'est-à-dire la matrice *A* où les lignes ont été mises en colonnes (ou les colonnes mises en lignes) : si $[f]_B^D=A=[a_{ij}]$, $[f^t]_{D'}^{B'}=A^T=[a_{ji}]$ où *B'* est la base duale de *B*, *D'* la base duale de *D*, $i=1,\ldots,n$ et $j=1,\ldots,m$.

La transposée est citée, en tant qu'application, dans pratiquement tous les manuels analysés. Remarquons qu'il n'en est pas fait mention chez Pham & Dillinger (1996) par exemple. Dans cet ouvrage apparaît seulement la définition de matrice transposée, sans aucun lien explicite avec l'application transposée qui n'est quant à elle pas mentionnée.

Mac Lane & Birkhoff (1971) n'utilisent pas le terme de transposée pour une application, mais parlent de dual d'un morphisme de $\mathbb{R}$-modules dans un premier temps (p.250), puis d'application duale (p.321). Ils parlent cependant de matrice transposée (p.321).

Si l'application transposée est présentée dans la plupart des manuels analysés, elle ne l'est pas toujours à la même échelle. En effet, si elle est apparaît en tant que titre de section dans les livres d'Escofier (2006) et Merlin (1995), pour ne citer qu'eux, elle ne fait son apparition dans le livre de Grifone (2002) que sous le statut d'un exercice.

Sous ce thème, on pourra trouver des sujets tels que les applications linéaires, le rang, l'image et le noyau, les crochets de dualité, la matrice transposée, l'application adjointe, le produit scalaire, etc.

2.5. Les annulateurs

Tous les manuels ne s'accordent pas sur le terme utilisé pour les *annulateurs*. L'*annulateur* ***S°*** *d'un ensemble de vecteurs* ***S*** est, par définition, l'ensemble de formes linéaires qui s'annulent précisément en chaque vecteur de l'ensemble ***S***. Dans certains manuels, les annulateurs ne sont pas repris sous cette terminologie, mais sont définis comme le sous-espace *orthogonal* de l'ensemble ***S***. Comme il n'est nul besoin d'avoir défini l'orthogonalité (le produit scalaire) pour parler du dual algébrique, donc des annulateurs, c'est sous ce dernier terme que nous parlons de l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent en chaque vecteur de l'ensemble ***S***. Nous expliquons dans cette section pourquoi certains auteurs utilisent le terme « orthogonal » pour parler des annulateurs.

La notion d'annulateur établit un lien entre un ensemble de vecteurs d'un espace vectoriel *E* et un sous-espace du dual de *E* : si nous notons ***S*** un ensemble de vecteurs de *E*, son annulateur ***S°*** est l'ensemble des formes linéaires dont le noyau contient le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de ***S***, que nous notons Span{***S***}. On a donc : ***S°*** = $\{y \in E' : \text{Span}\,(S) \subseteq \ker\,(y)\}$. On voit donc bien le lien étroit existant entre le thème des annulateurs et le thème des formes linéaires (§ 2.2).

Etant donné que pour toute application linéaire *f* définie sur un espace vectoriel *E* (de dimension *n*), on a la relation bien connue : $\dim\,(\text{Im}(f)) + \dim\,(\text{Ker}(f)) = \dim E$, on a en particulier pour toute forme linéaire *y* définie sur *E* : $1 + \dim\,(\text{Ker}(y)) = \dim E = n$, c'est-à-dire que le noyau d'une forme linéaire *y* est un sous-espace de dimension *n*-1. Autrement dit, le noyau d'une forme linéaire (un élément du dual) est un hyperplan de *E*.

Si on considère un espace vectoriel *E* de dimension *n* et *S* un de ses sous-espaces, on a la propriété suivante : $\dim\,(S) + \dim\,(S°) = \dim E$. Celle-ci établit de nouveau un lien entre (la dimension d') un sous-espace de *E* et (la dimension d') un sous-espace du dual *E'*. Cette propriété se démontre en prenant une base du sous-espace S, soit $\{b_1, ..., b_s\}$, et en la complétant pour obtenir une base de *E* : $\{b_1, ..., b_s, b_{s+1}, ..., b_n\}$. En considérant la base duale de cette base de *E*, soit $\{b_1', ..., b_s', b_{s+1}', ..., b_n'\}$, on montre que les *n-s* formes linéaires b_i' (où $(s+1) \leq i \leq n$) constituent une base de *S°*.

Le lien avec l'appellation d'orthogonal en lieu et place d'annulateur par certains auteurs est alors flagrant :

- Tout d'abord, si l'on considère les coordonnées $(x_1,...,x_n)$ d'un vecteur *x* d'un espace métrique *E* de dimension *n*, ainsi que les coordonnées $(y_1,...,y_n)$ d'un élément *y* de son dual *E'*, la relation $y(x)=0$, que l'on peut aussi noter à l'aide des crochets de dualité $[x,y]=0$, peut s'interpréter en termes de produit scalaire nul entre les deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ déterminés par $(x_1,...,x_n)$ et $(y_1,...,y_n)$.

- Ensuite, en observant le théorème « $\dim(S)+\dim(S°)=\dim E$ », on s'aperçoit qu'une version plus forte existe lorsque l'on considère que *S* est un sous-espace d'un espace métrique *E*, et que l'on considère $S^\perp$, l'orthogonal de *S* (au sens du produit scalaire) : $S^\perp=\{x\in E \mid \forall s\in S : \ <s,x>=0\}$, car on a alors : $S\oplus S^\perp=E$ (qui implique aussi, forcément, que $\dim(S)+\dim(S^\perp)=\dim E$).

Etant donnée la remarque précédente, on pourra aussi lier au thème des annulateurs les crochets de produit scalaire, par analogie avec les crochets de dualité.

Comme cela sera illustré à la section 3.2, on peut interpréter un système d'équations linéaires en termes de formes linéaires, éléments du dual :

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y_1(x)=0 \\ y_2(x)=0 \\ \dots \\ y_m(x)=0 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} x=(x_1,...,x_n) \\ y_i\in(\mathbb{R}^n)' \ , 1\le i\le m \end{array}$$

Lorsqu'un tel système est homogène (seconds membres nuls), on peut alors considérer que son ensemble de solutions, *S*, est l'intersection des hyperplans définis par les noyaux de chaque forme linéaire y_i, ou encore qu'il constitue le sous-espace vectoriel sur lequel s'annulent les *m* formes linéaires y_i. Si on suppose que le sous-espace du dual engendré par les formes linéaires y_i, Span(y_i), qui n'est autre que *S*° l'annulateur de *S*, est de dimension *r* (c'est-à-dire qu'on considère qu'il y a au plus *r* formes linéairement indépendantes parmi les *m* formes linéaires y_i), on a alors que la dimension de l'ensemble des solutions du système, *S*, est *n-r*, puisqu'on sait que $\dim(S)+\dim(S°)=\dim\mathbb{R}^n=n$ et qu'on a supposé que *S*° = Span(y_i) est de dimension *r*.

Nous verrons au chapitre 2 que ce résultat fut fondamental pour la mise au jour de notions associées à la dualité tel le rang (Dorier 2000).

C'est sous le thème des annulateurs que l'on retrouvera, entre autre, les sujets de rang, d'image et de noyau d'une application linéaire. C'est ici aussi que l'on pourrait classer le théorème fondamental de l'algèbre linéaire qui peut s'énoncer comme suit : Si *f* est une application linéaire d'un espace vectoriel *E* vers un espace vectoriel *F*, alors (Im(*f*))° = Ker(f^t) ; si *E* est de dimension finie, alors (Ker(*f*))° = Im(f^t). Remarquons que ce théorème a tout autant sa place dans le thème de l'application transposée que dans le thème des annulateurs.

Halmos (1974) traite encore davantage de sujets conjointement sous les thèmes du dual et des annulateurs. Par exemple le dual d'une somme directe de sous-espaces vectoriels, qui est impliqué dans le théorème suivant : Si M et N sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = M \oplus N$, alors, M' est isomorphe à $N°$ et N' est isomorphe à $M°$. De plus, $E' = M° \oplus N°$.

Après avoir présenté les cadres théoriques et la description du secteur dualité dont nous nous servirons dans nos réflexions ou nos analyses, nous nous tournons maintenant vers des travaux didactiques relatifs à l'algèbre linéaire.

3. Travaux didactiques reliés à l'algèbre linéaire

Depuis le milieu des années quatre-vingts, des travaux de didactique s'intéressent à l'algèbre linéaire. Dans le cadre de notre recherche, nous ne prétendons pas faire une étude exhaustive de ces derniers. En effet, tous ne mettent pas en jeu la dualité, et les travaux qui en traitent ne considèrent pas véritablement la dualité comme un sujet d'étude, ce que notre recherche se propose de faire.

Nous présentons dans cette section les travaux relatifs à l'algèbre linéaire dont nous nous sommes inspirée dans notre recherche (Robert & Robinet 1989, Dorier 1990, Rogalski 1991, 1994) et ceux où la dualité est abordée (Dubinsky 1991, Robert 1997, Alvès-Dias 1998).

3.1. Sur la détermination des sources de difficultés en algèbre linéaire

Nous nous référons ici à des enquêtes réalisées par Robert et Robinet, Dorier, et Rogalski, auprès d'étudiants du premier cycle universitaire scientifique en France (DEUG[7]) entre 1987 et 1994. Nous les présentons brièvement, en nous focalisant dans leurs résultats sur ce qui est pertinent pour notre recherche.

- La **première enquête**, réalisée en 1987 par Robert & Robinet (1989), a été menée auprès de 379 étudiants inscrits en deuxième année à l'université de Paris 6, Paris 7 et Lille. Elle avait pour but d'évaluer les connaissances et conceptions qu'ont les étudiants en algèbre linéaire après une première année universitaire, où ils avaient rencontré les notions d'espaces et sous-espaces vectoriels, applications linéaires, systèmes d'équations linéaires, formes linéaires, matrices et déterminants.

  Les conclusions de cette enquête mettent entre autres en évidence que :

  - plus de la moitié des étudiants ne sait pas résoudre un système d'équations linéaires de quatre équations à quatre inconnues,
  - un peu moins du tiers des étudiants ne sait pas établir la matrice d'une transformation linéaire dans le cadre des polynômes,
  - une majorité d'étudiants considèrent que l'algèbre linéaire traite des objets abstraits, et introduit de nombreux symboles, définitions et théorèmes nouveaux.

- La **deuxième enquête** a été menée en 1990 et 1991 par Dorier (1990) auprès d'étudiants de DEUG. Elle s'intéressait aux types de tâches proposés en algèbre linéaire, et aux

[7] DEUG est l'acronyme de Diplôme d'Etudes Universitaires Générales ; il représentait à l'époque l'enseignement des deux premières années universitaire en France.

techniques mises en œuvre par les étudiants les concernant. De plus, cette enquête visait aussi à repérer des types d'évolution des connaissances en algèbre linéaire auprès des étudiants, en fonction des connaissances préalables qu'ils possèdent en logique mathématique et en algèbre. Ainsi, cette enquête comportait un pré-test visant à évaluer, en début d'année, les connaissances des étudiants en logique élémentaire et en algèbre.

A propos de l'analyse des difficultés des étudiants, l'auteur donne les explications suivantes quant à leurs origines :

- Les étudiants éprouvent des difficultés à comprendre pourquoi ils doivent s'investir dans un nouveau langage et un nouveau raisonnement que constituent ceux de l'algèbre linéaire, étant donné que la résolution des problèmes auxquels ils sont confrontés dans ce domaine des mathématiques lors de son apprentissage n'exige pas le recours à l'algèbre linéaire (prenons la résolution de systèmes d'équations linéaires par exemple). Le caractère FUGS (Robert 1998) des notions d'algèbre linéaire fait que ces notions peuvent alors difficilement être la solution d'un problème introductif (et encore moins correspondre à une situation fondamentale, Brousseau 1998).

- Les étudiants ne disposent pas de praxéologies préliminaires (mêmes incomplètes) nécessaires à la résolution des problèmes qui leurs sont soumis en algèbre linéaire. Dorier (1990) parle d'un manque de *techniques algébriques* de la part des étudiants. Ainsi par exemple, ils n'ont généralement pas été confrontés à des praxéologies relatives à un formalisme utilisant plusieurs indices de sommation, alors que ce dernier est couramment utilisé en algèbre linéaire.

- Une corrélation existe entre la réussite en algèbre linéaire et les connaissances préliminaires en logique élémentaire (résultats du pré-test proposé aux étudiants). Mais il faut rester prudent à ce sujet : ce n'est pas parce qu'un sujet a des connaissances *techniques* (au sens de Robert, voir §1.1, page 5) en logique qu'elles sont pour autant *mobilisables* ou *disponibles* dans le cadre du cours d'algèbre linéaire.

- La **troisième enquête** à laquelle nous faisions référence au début de cette section est en fait un groupement d'enquêtes réalisées de 1992 à 1994 par Rogalski (1991, 1994) à l'université de Lille1 en première année de DEUG, section expérimentale. En 1992 et 1993, les notions interrogées étaient le rang d'un système de vecteurs, ainsi que les sous-espaces vectoriels, qu'ils soient définis par un ensemble de vecteurs générateurs, par des équations paramétriques ou des équations implicites. En 1994, le recueil de données n'a porté que sur les sous-espaces vectoriels tout d'abord dans $\mathbb{R}^3$, et ensuite dans $\mathbb{R}^4$.

  Précisons que les étudiants ayant participé à ces enquêtes avaient déjà reçu un enseignement d'algèbre linéaire comprenant la méthode de Gauss pour les équations, de la géométrie dans $\mathbb{R}^3$, la théorie du rang et de la dimension pour les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$, où les sous-espaces ont été définis à la fois au moyen d'équations, et au moyen de paramètres.

  Citons quelques conclusions tirées de l'analyse des réponses aux enquêtes effectuées à Lille :

- On constate une confusion de la part des étudiants :
  - entre variables et paramètres,
  - entre vecteurs et coordonnées ;
  - entre vecteurs et sous-espaces engendrés ;
  - entre vecteurs d'un sous-espace et les coefficients de l'équation le caractérisant ;

  - entre les relations liant des sous-espaces (hyperplans) et les relations liant les équations les représentant. Ainsi, par exemple, si e_i est l'équation caractérisant le sous-espace vectoriel E_i, une relation de dépendance linéaire $e_3 = ae_1 + be_2$ peut être faussement interprétée par les étudiants par $E_3 \subseteq E_1 \cap E_2$. Les étudiants ne perçoivent pas le caractère dual qui existe entre les équations et les vecteurs appartenant aux sous-espaces caractérisés par celles-ci. Rappelons que la dualité ne leur a pas été enseignée.

- Des équations engendrent des difficultés auprès des étudiants, de par leur caractère logique et ensembliste. En effet, les équations peuvent être interprétées comme des contraintes manifestant l'appartenance à un sous-espace, des intersections de sous-espaces s'expriment par la réunion des équations déterminant chacun des sous-espaces en particulier, etc.

- On constate une méconnaissance de la théorie des ensembles en général. Les étudiants ne savent pas facilement déduire de la relation $E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_2 \cap E_3$ la relation $E_1 \cap E_2 \subseteq E_3$, qui peut pourtant être facilement vérifiée avec un langage ensembliste (utilisant des symboles mathématiques ou des diagrammes de Venn).

- Les étudiants préfèrent travailler avec des vecteurs qu'avec des équations ; ils ne comprennent pas toujours ce que signifie le fait qu'une équation soit combinaison linéaire de deux autres.

- L'analogie entre $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ est aussi utilisée par les étudiants comme un contrôle des résultats ou un éclaircissement sur leur raisonnement.

Une conclusion commune à l'ensemble des enquêtes présentées dans cette section est que lors de l'apprentissage de l'algèbre linéaire, les étudiants sont confrontés à ce que Dorier *et al.* (1997b) nomment « l'obstacle du formalisme ». C'est pourquoi les auteurs de ces enquêtes plaident pour un enseignement « minimal » de logique élémentaire et théorie des ensembles, non nécessairement déconnecté de l'algèbre linéaire.

Dans les enquêtes que nous avons menées concernant la dualité en algèbre linéaire, nous retrouvons auprès des étudiants de l'université de Namur certaines difficultés déjà repérées dans les enquêtes citées dans cette section. Nous y reviendrons au chapitre 4.

3.2. Travaux traitant de la dualité algébrique

a) La dualité dans la théorie APOS

Bien que Dubinsky n'ait pas mené de travaux spécifiques sur la dualité, il a cependant utilisé des notions de dualité pour l'illustration de la théorie APOS (Dubinsky 1991). Nous présentons les travaux correspondants dans cette section.

Dubinsky propose ainsi une suggestion de *décomposition génétique* du dual d'un espace vectoriel, à titre d'illustration de cette notion essentielle dans APOS. Il précise cependant que cette décomposition est totalement spéculative, étant donné que la seule source sur laquelle il se base pour l'établir est une réflexion sur sa propre expérience. Il suppose tout d'abord que le sujet concerné par l'apprentissage de la notion de dual possède un Schéma d'un espace vectoriel (que nous notons S_{ev}), ainsi qu'un Schéma du concept de fonction transformant des nombres en nombres (que nous notons S_{f_n}). Pour arriver au Schéma d'un espace vectoriel, les vecteurs ont été considérés comme des objets sur lesquels des actions ont pu être menées, telles l'addition et la multiplication par un scalaire. Pour arriver à un Schéma du dual, E. Dubinsky propose en première étape une généralisation du Schéma de fonction S_{f_n} afin que soit reconnue comme fonction un processus qui transforme un *vecteur* en un scalaire. En faisant agir de telles fonctions sur des sommes de vecteurs et sur des multiplications d'un vecteur par un scalaire, on obtient un sous-ensemble de ces fonctions qui sont vues comme des processus transformant des vecteurs en scalaires *et* préservant les opérations algébriques d'addition et de multiplication scalaire. Ces fonctions sont alors encapsulées dans l'Objet « forme *linéaire* », et peuvent être rassemblées dans un ensemble. Pour que cet ensemble de formes linéaires, muni des lois d'addition et de multiplication par un scalaire puisse être assimilé au Schéma d'un espace vectoriel (S_{ev}), il est indispensable qu'au préalable ce Schéma ait été (re-)construit par le sujet à un niveau « supérieur », de telle sorte que ses éléments puissent être des formes linéaires. L'espace vectoriel ainsi obtenu est appelé le dual.

Une fois la décomposition génétique du dual établie, on peut mettre en œuvre les différentes étapes de la théorie APOS. Ainsi, le calcul (ou plus exactement la détermination) du dual d'un espace vectoriel particulier est une Action sur cet objet. L'idée que la détermination d'un espace dual puisse être menée pour n'importe quel espace vectoriel correspond alors à l'intériorisation de l'Action (ou des Actions) menée(s) précédemment, et conduit au Processus.

Ce Processus peut être soit répété, soit renversé. En effet, s'il est répété sur l'espace dual obtenu par une première application du Processus à un espace vectoriel E, on obtient alors le dual du dual, c'est-à-dire le bidual, noté E''. Le Processus sera renversé, lorsque le sujet, confronté à un espace vectoriel F, devra essayer de trouver l'espace vectoriel E tel que $E' = F$. Ayant réfléchi sur les opérations pouvant mettre en œuvre le Processus, le sujet pourra alors « encapsuler » ce Processus pour en faire un Objet, qui sera alors lui-même englobé dans un Schéma.

Bien entendu, dans notre étude, nous avons analysé plus en détail les notions en lien avec la dualité (voir § 2 et chapitre 3). Dubinsky relève d'ailleurs lui-même les limites de sa démarche quant à son apport pour la dualité. Notre attention ne se portera donc pas principalement sur la décomposition génétique qu'il nous offre, mais plus particulièrement sur le fait qu'il mentionne que, pour le dual, le statut de Processus sera atteint lorsque le sujet se sera rendu compte que la démarche suivie pour la détermination du dual d'un espace vectoriel pourrait être appliquée à *n'importe quel autre* espace vectoriel. Pour se faire, il faut bien entendu que le sujet dispose d'un catalogue suffisant d'exemples d'espaces vectoriels. Nous y reviendrons au chapitre 4.

b) Niveaux de conceptualisation

Dans un article sur les niveaux de conceptualisation, Robert (1997) propose une illustration de cette notion utilisant la dualité. Etant donné que cette dernière y intervient comme un outil (Douady 1986) de résolution d'un problème posé dans l'article, nous le présentons ici.

Robert définit la notion de niveau de conceptualisation comme :

> un palier dans un champ de connaissances mathématiques (champ conceptuel), correspondant à une organisation cohérente d'une partie du champ, caractérisée par des objets mathématiques présentés d'une certaine façon, des théorèmes sur ces objets, des méthodes associées à ces théorèmes, et des problèmes que les élèves peuvent résoudre avec les théorèmes du niveau considéré, et en utilisant ces méthodes. (Robert 1997, p. 149).

Elle précise que de nombreuses notions peuvent être abordées à divers niveaux de conceptualisation et donne plusieurs exemples, dont un que nous présentons ici puisqu'il implique des notions de dualité. Il s'agit du problème dit « du carré magique de somme nulle » qui consiste à trouver tous les tableaux de trois lignes et trois colonnes tels que la somme des éléments (nombres réels) se trouvant sur une ligne horizontale ou verticale ou diagonale fasse toujours zéro. Après avoir fait remarquer que l'élément central d'un tel carré doit être nul[8], elle propose quatre méthodes de résolution, relevant de niveaux de conceptualisation différents. La première méthode proposée par Robert (1997) procède par essais-erreurs et permet d'arriver à la solution. Il s'agit là d'un premier niveau de conceptualisation, qui ne fait appel à aucune notion formalisée d'algèbre ou d'algèbre linéaire. La deuxième méthode consiste en la résolution d'un système linéaire de huit équations à huit inconnues, qui peut être résolu par la méthode de Gauss par exemple. On se place ici à un niveau de conceptualisation moins élémentaire que le premier considéré, étant donné que des connaissances sur les systèmes d'équations linéaires sont mobilisées.

a	*b*	*c*
d	0	*f*
g	*h*	*i*

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ d+f = 0 \\ g+h+i = 0 \\ a+d+g = 0 \\ b+h = 0 \\ c+f+i = 0 \\ a+i = 0 \\ c+g = 0 \end{cases}$$

Figure 1-10 : Vers une résolution du "tableau magique"

a	*b*	*-(a+b)*
-(2a+b)	0	*2a+b*
a+b	*-b*	*-a*

Figure 1-11 : Forme générale du carré magique de somme nulle (*a, b* réels quelconques)

Si on interprète la deuxième méthode de résolution proposée par Robert en termes d'espace vectoriel, on se place alors encore à un autre niveau de conceptualisation, puisqu'on utilise un formalisme propre à l'algèbre linéaire. On aboutit alors à une troisième méthode qui consiste à démontrer que l'ensemble des carrés magiques de somme nulle est un espace vectoriel de dimension 2 (construit sur $\mathbb{R}$), et qu'on peut ensuite exprimer tout élément de cet espace (c'est-à-dire tout carré magique de somme nulle) comme combinaison linéaire (voir Figure 1-11) d'une base de cet espace.

Enfin, la quatrième méthode proposée par Robert pour la résolution du problème des carrés magiques se situe encore à un niveau de conceptualisation plus élevé, car elle met en œuvre des notions de dualité, notions que l'on peut qualifier de non-élémentaires en algèbre linéaire puisqu'elles ne figurent pas dans tous les manuels traitant d'algèbre linéaire. La

[8] Ce qui peut être montré en additionnant les éléments des deux diagonales et d'une ligne centrale (somme qui vaut zéro par définition du carré magique de somme nulle), et en réordonnant ensuite les termes de manière à obtenir la somme de deux lignes en bord du carré plus l'élément central.

quatrième méthode proposée interprète le problème énoncé en termes de formes linéaires (§ 2.2), de sous-espaces vectoriels et d'annulateurs (§ 2.5) : il est clair que l'ensemble des carrés magiques de somme nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3x3}$ (espace vectoriel des matrices réelles de trois lignes et trois colonnes), notons-le *S*. L'annulateur de ce sous-espace *S* est le sous-espace du dual de $\mathcal{M}_{3x3}$ engendré par les formes linéaires définies par les membres de gauche des équations reprises dans la Figure 1-10 ; nous le notons *S*°. On peut montrer que ce sous-espace du dual de $\mathcal{M}_{3x3}$ est de dimension 7 (il y a 7 équations linéairement indépendantes parmi les 8 écrites). Par conséquent, en utilisant le fait (voir § 2.5, page 27) que $\dim(S) + \dim(S°) = \dim \mathcal{M}_{3x3} = 9$, on a immédiatement que l'ensemble des solutions au problème, *S*, est de dimension 2.

Ainsi, l'illustration qui est faite ici par Robert des niveaux de conceptualisation met en œuvre une fonctionnalité outil (Douady 1986) de notions de dualité. Nous reviendrons sur la notion de fonctionnalité outil, que nous détaillons au chapitre 3, § 1. Nous pouvons noter, de plus, que le niveau de conceptualisation faisant intervenir la dualité se situe au niveau le plus élevé par rapport aux autres niveaux présentés pour le problème considéré.

c) Une introduction à l'algèbre linéaire formelle

L'analyse des résultats des enquêtes présentées en § 3.1 ainsi que les recherches menées par Dorier (1997, 2000) ont été exploitées à la fin des années 80 et au début des années 90 afin de concevoir un enseignement expérimental de l'algèbre linéaire à l'Université des Sciences et Technologies de Lille (Rogalski 1997).

L'ingénierie élaborée pour l'enseignement de l'algèbre linéaire, qui comporte quatre étapes, se base sur trois hypothèses :

1. la prise en compte du caractère FUGS des notions d'algèbre linéaire (variation de cadres, etc.) ;
2. le fait que l'enseignement de l'algèbre linéaire nécessite certains prérequis, comme l'utilisation d'un langage mathématique (logique, etc.), d'une démarche mathématique (abstraction, etc.), et la pratique de la géométrie dans l'espace et de la géométrie cartésienne ;
3. l'utilisation interactive des trois idées suivantes :
   - le recours dans l'enseignement à des éléments d'information ou de connaissance sur les mathématiques (« levier méta », Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 1997a) ;
   - la construction d'ingénieries longues ;
   - l'utilisation des changements de point de vue.

La deuxième de ces hypothèses évoque des prérequis pour l'enseignement de l'algèbre, en spécifiant néanmoins que l'enseignement de ces prérequis peut avoir lieu en parallèle avec l'enseignement des débuts de l'algèbre linéaire. De fait, les deux premières étapes de l'ingénierie proposée à Lille prévoient le développement de préliminaires, en même temps que le début de l'algèbre linéaire, laissant cependant la présentation de l'algèbre linéaire abstraite (axiomatique des espaces vectoriels, etc.) pour la troisième étape. La quatrième étape de l'ingénierie présente quant à elle l'étude des matrices et des changements de base. Nous ne nous attardons dans cette sous-section que sur les deux premières étapes de l'ingénierie, la présentation de l'algèbre linéaire formelle (troisième étape) n'intégrant pas la dualité.

En se basant sur des travaux historiques et épistémologiques (qui ont ensuite été publiés dans Dorier 1997), les auteurs de l'ingénierie ont choisi d'organiser leur enseignement de l'algèbre linéaire de manière à dégager, dans une position centrale, la notion de *rang*, qui est liée à une *dualité non formelle* (voir § 2.5 et chapitre 2) entre les équations d'un système d'équations linéaires et l'ensemble des solutions de ce système.

Ainsi, dans une première étape de l'ingénierie, après avoir introduit la méthode de Gauss pour solutionner un système d'équations linéaires quelconque, les auteurs se basent sur une approche qualitative de résolution des systèmes d'équations linéaires, en proposant aux étudiants des questions telles :

> - ai-je trop d'équations, pas assez, juste ce qu'il faut ?
>
> - combien de paramètres me faut-il pour décrire l'ensemble des solutions d'un système d'équations ? et les seconds membres permettant de le résoudre ?
>
> (Rogalski 1997, p. 166).

Le raisonnement ainsi introduit est prolongé par un enseignement de géométrie analytique, mettant en avant des questions relatives au double aspect équations/paramétrage. De plus des problèmes d'intersection et d'inclusion de sous-espaces sont proposés aux étudiants de manière à les familiariser avec la logique et la théorie des ensembles.

Le mathématicien reconnaît, dans les questions proposées ici aux étudiants (Rogalski 1997, p.166), un raisonnement de dualité permettant de penser un ensemble de solutions d'un système d'équations linéaires à travers des équations (hyperplans) ou à travers la notion d'espace engendré par un ensemble de vecteurs (§ 2.5). Précisons qu'à ce stade de l'ingénierie, la notion d'espace vectoriel n'a pas encore été présentée aux étudiants. Une dualité non formelle est donc déjà présentée dans la première partie de l'ingénierie présentée.

La deuxième étape de l'ingénierie, se basant sur ce qui a été observé en première partie, suggère alors un changement de point de vue en considérant une équation linéaire homogène comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$. L'indépendance linéaire et le rang sont alors définis. Le passage de l'expression d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ défini par des équations à une description paramétrique de ce sous-espace est examinée, ainsi que le passage dans l'autre sens. Les notions de dimension et de base d'un sous-espace sont alors présentées. Des problèmes d'égalité, d'inclusion et d'intersection de sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ sont également abordés. Des méthodologies sont proposées. Une formulation abstraite est préférée à une écriture utilisant des coordonnées, de manière à favoriser l'introduction, dans l'étape ultérieure de l'ingénierie, de l'algèbre abstraite. Les cadres abordés dans cette deuxième étape de l'ingénierie sont variés : systèmes d'équations linéaires, polynômes, suites récurrentes linéaires, équations différentielles linéaires.

Ainsi, dans la deuxième étape de l'ingénierie proposée à Lille, la dualité algébrique apparaît-elle encore de manière implicite, notamment de par le passage entre la représentation d'un sous-espace déterminé par des équations à la représentation de ce sous-espace sous forme paramétrique (sous-espace engendré par un ensemble de vecteurs). La troisième étape de l'ingénierie, qui présente l'algèbre linéaire abstraite, ne développe cependant pas la dualité algébrique formelle (§ 2). Nous y reviendrons au chapitre 5.

L'articulation entre points de vue cartésien (équations) et paramétrique est reprise et développée par Alvès-Diaz (1998). Nous la présentons dans la sous-section suivante.

d) L'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique à travers la dualité

Nous nous référons dans cette section à la thèse d'Alvès-Dias, intitulée « Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire » (Alvès-Dias 1998).

Alvès-Dias définit ce qu'elle entend par point de vue cartésien et point de vue paramétrique :

> Pour un sous-espace vectoriel donné, nous dirons que nous adoptons un point de vue paramétrique quand nous concevons ce sous-espace comme sous-espace engendré par un ensemble de vecteurs, que cet ensemble de vecteurs soit minimal ou non. […] Nous dirons que nous adoptons un point de vue cartésien quand nous concevons ce sous-espace comme l'ensemble des vecteurs solutions d'une équation ou d'un système d'équations linéaires. (Alvès-Dias 1998, p. 46).

Elle précise par la suite que l'articulation entre les deux points de vue considérés peut être envisagée d'une façon très simple si l'on considère que :

> un sous-espace vectoriel de dimension *r* d'un espace vectoriel de dimension *n* peut être caractérisé de façon minimale :
>
> - soit par un système de *n-r* équations linéaires homogènes ;
> - soit par une représentation paramétrique dépendant de *r* paramètres.
>
> (Alvès-Dias 1998, p. 51).

Cette simplicité, qui est renforcée par la mise en place de techniques algorithmiques permettant de passer d'une représentation à une autre, n'est en fait qu'apparente, au vu des nombreuses difficultés observées auprès des étudiants confrontés à l'articulation entre ces deux points de vue (Alvès-Dias 1993). Alvès-Dias distingue alors différents cadres (Douady 1986) et différents registres de représentation sémiotique (Duval 1995), et étudie les problèmes d'articulation entre ces derniers, en analysant la flexibilité entre les deux points de vue considérés (cartésiens et paramétriques). Nous ne rentrons pas dans les détails des différentes représentations, mais donnons seulement un exemple d'une représentation possible du point de vue cartésien (Figure 1-12) et paramétrique (Figure 1-13) pour un sous-espace vectoriel *F* particulier, mais arbitraire.

$$F=\left\{(x,y,z,t,w)\in\mathbb{R}^5\ :\ x+y+z+2t+w=0\ \text{ et }\ -3y+z-8t+3w=0\right\}$$

Figure 1-12 : Représentation cartésienne (explicite) du sous-espace *F*

$$\begin{aligned}F &= Span\left\{(-4,1,3,0,0),(-10,0,8,1,0),(2,0,-3,0,1)\right\}\\ &=\left\{y(-4,1,3,0,0)+t(-10,0,8,1,0)+w(2,0,-3,0,1),\ \text{avec }\ y,t,w\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

Figure 1-13 : Représentation paramétrique (explicite-tableau) du sous-espace *F*

Comme nous l'avons montré à la section 2.5, les notions de dualité éclairent les rapports entre points de vue paramétrique et cartésien :

> C'est la notion de dualité qui permet d'abord en effet d'établir une symétrie entre les deux types de représentation, en permettant de penser les équations linéaires homogènes comme des vecteurs, en tant que formes linéaires, de l'espace dual. On associe ainsi à tout système d'équations linéaires

> homogènes, le sous-espace engendré dans le dual des formes linéaires E^*. (Alvès-Dias 1998, p. 62).

Une technique impliquant des notions de dualité permet de passer d'une représentation à une autre. Cette technique est à rapprocher de celle présentée dans l'illustration des niveaux de conceptualisation par Robert (§ 3.2.b) :

> Cette vision en termes de dualité fournit une autre technique de passage entre représentation paramétrique et cartésienne, via les techniques de complétion de bases et l'utilisation de bases duales. En effet, si F est un sous-espace de dimension r de E de dimension n et $\{e_1,...,e_r\}$ une base de F, en complétant cette base, on peut obtenir une base $\{e_1,...,e_n\}$ de E. Une représentation cartésienne minimale de F est alors fournie, conformément à ce qui précède[9], par les équations définissant les noyaux des formes linéaires $e^*_{r+1},...,e^*_n$. (Alvès-Dias 1998, p. 63).

Alvès-Dias donne ensuite un exemple illustrant ses propos dans $\mathbb{R}^4$.

Nous montrons au chapitre 2 qu'historiquement, c'est à travers une telle articulation qu'ont été dégagées des notions fondamentales en algèbre linéaire, comme la notion de rang par exemple (Dorier 2000).

Cependant, si la dualité permet de justifier, pour un mathématicien « expert », le passage entre les représentations paramétrique et cartésienne d'un sous-espace, elle peut s'avérer être une difficulté supplémentaire pour des étudiants éprouvant déjà de la peine à articuler les deux points de vue :

> Cette structuration théorique de l'articulation des points de vue par la dualité est pour le mathématicien d'aujourd'hui simple et efficace, mais elle oblige à articuler le travail dans deux types d'espaces et en particulier de travailler dans des espaces de formes linéaires. Or on sait que considérer et gérer des applications linéaires comme des vecteurs ne va pas de soi pour les étudiants, et l'on peut légitimement se demander si c'est à ce niveau là que l'on peut trouver pour eux une structuration de l'univers technique de l'articulation qui permette son pilotage et son contrôle de façon efficace. (Alvès-Dias 1998, p. 64).

Ainsi, la dualité, dans son aspect formel (voir chapitre 2) ne sera pas utilisée par Alvès-Dias dans le reste de son travail de thèse. Mais il nous a semblé opportun d'en parler ici, étant donné l'éclairage que la dualité peut apporter à l'articulation entre les deux points de vue considérés.

4. Problématique

Les cadres théoriques présentés dans la première section de ce chapitre vont maintenant nous permettre de préciser les questions que nous nous posons dans notre recherche (§ 4.1). Nous indiquons ensuite (§ 4.2) comment ce que nous avons développé dans ce chapitre interviendra dans la suite de notre travail.

[9] Ndr : il s'agit des relations unissant une base d'un espace vectoriel à sa base duale ; voir § 2.3.

4.1. Questions de recherche

Les travaux évoqués ci-dessus nous permettent désormais de reprendre et de préciser nos questions de recherche.

Tout d'abord, il nous semble essentiel d'entreprendre une étude à caractère épistémologique : celle-ci éclaire les difficultés des étudiants, comme l'ont montré les travaux de Dorier (2000) ou la théorie APOS (Dubinsky & Mc Donald 2001). De plus une telle étude est un préalable nécessaire à un questionnement en termes de dialectique outil-objet. Ainsi, nous tentons de répondre à la question suivante :

- Comment ont émergé les notions associées à la dualité dans la genèse historique de l'algèbre linéaire ? Peut-on identifier des ruptures épistémologiques ?

Nous adoptons ensuite une perspective institutionnelle. Celle-ci nous conduit à nous intéresser aux différentes structurations possibles concernant le savoir relatif à la dualité, en fonction des niveaux considérés (Chevallard 2007). Nous nous intéressons donc à la question suivante :

- Quelles structurations de la dualité peut-on proposer, en se référant au cadre théorique de la TAD ?

Après avoir étudié la dualité en algèbre linéaire en tant qu'objet, et dans la perspective éventuelle de nous appuyer sur une dialectique outil-objet (Douady 1986) pour l'enseignement de ce secteur, il nous semble aussi important de nous interroger sur les différentes finalités outil (Douady 1986) qu'offre la dualité en algèbre linéaire. Ainsi, en nous positionnant dans la dialectique outil-objet, nous sommes amenée à nous poser la question suivante :

- Quelles sont les différentes finalités outil qui peuvent être associées à la dualité en algèbre linéaire ?

Lorsque la dualité, structurée par l'institution, est enseignée en tant qu'objet à des étudiants relativement débutants en algèbre linéaire, mais désireux d'étudier les mathématiques ou la physique, ces derniers sont confrontés à de nombreuses difficultés, récurrentes d'année en année. En gardant notre perspective institutionnelle, il est important d'essayer de classifier les difficultés observées afin d'en dégager des interprétations et d'en déceler les causes. Nous essayons donc de répondre aux questions suivantes :

- Quelle catégorisation peut-on établir pour les difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'apprentissage des notions liées à la dualité ?

- Quelles interprétations peut-on faire de ces difficultés, quelles hypothèses sur leurs causes ?

Les étudiants que nous avons observés dans notre étude sur la dualité sont déjà confrontés à un changement de contrat institutionnel (Chevallard 1989), puisqu'ils sont nouvellement inscrits dans l'institution université où leur est enseignée l'algèbre linéaire dès la rentrée académique. Or, nous avons montré (§ 1.5) qu'un contrat didactique institutionnel pouvait aussi être en vigueur au niveau d'un contenu particulier. Cependant, la dualité n'est pas enseignée en tant qu'objet dans l'institution enseignement secondaire. On peut dès lors se demander si des difficultés observées lors de l'apprentissage de la dualité peuvent être expliquées par des phénomènes de transition, que nous savons être divers (Artigue 2006, Gueudet 2008, Winsløw 2008, etc.). Nous nous intéressons donc à la question suivante :

- Peut-on parler de transition quand on aborde des notions de dualité ? Si oui, en quels termes ?

Enfin, nous nous intéressons à la question de la mise en place d'un dispositif d'enseignement, dans l'institution université, à destination des étudiants en apprentissage de la dualité en algèbre linéaire, basé sur le résultat des analyses des difficultés des étudiants. En effet, l'analyse des difficultés observées et les hypothèses sur leurs causes fournissent des indices sur les conceptions des étudiants préalables à l'enseignement de la dualité qui doivent être pris en compte lors de l'enseignement de ce secteur d'algèbre linéaire. Nous nous posons donc la question suivante :

- Peut-on mettre en place un dispositif d'enseignement, viable dans l'institution université, permettant d'aider les étudiants dans leur apprentissage de la dualité en algèbre linéaire ?

4.2. Emploi des cadres théoriques

Nous utilisons les cadres théoriques présentés dans ce chapitre pour nous aider à répondre aux questions posées ci-dessus, à l'exception du cadre théorique d'APOS, comme nous l'avons déjà signalé (§ 1.2). Précisons que ce dernier est davantage utilisé au Mexique et aux Etats-Unis en ce qui concerne l'algèbre linéaire.

Ainsi, au chapitre suivant, les analyses déjà réalisées par Dorier (1997, 2000), entre autres, nous éclairent pour présenter une analyse à caractère épistémologique de l'émergence des concepts de dualité en algèbre linéaire.

Au chapitre 3, la théorie anthropologique du didactique (§ 1.4) nous aidera à analyser la structure du savoir à enseigner relatif à la dualité. Nous faisons aussi référence à la dialectique outil-objet (§ 1.3) de Douady (1986).

Au chapitre 4, nous présentons tout d'abord une enquête conçue pour déceler les difficultés des étudiants confrontés à l'enseignement de la dualité en algèbre linéaire. La conception de cette enquête se base sur divers cadres théoriques présentés ici (Chevallard 2007, Douady 1986, Robert 1998). Ensuite, pour analyser les difficultés des étudiants mises au jour par cette enquête, nous nous appuyons toujours sur la théorie anthropologique du didactique, complétée par les propos de Winsløw concernant la transition (§ 1.6). Nous pourrons également mettre en relation les difficultés constatées dans nos enquêtes avec les difficultés mises en lumière par les enquêtes déjà réalisées (§ 3.1).

Au chapitre 5, nous formulons des propositions de dispositifs pour l'enseignement de la dualité algébrique, dont certaines ont été mises en œuvre à l'université de Namur. Ces propositions tiennent évidemment compte des différentes analyses effectuées dans les chapitres précédents. Divers cadres théoriques sont ainsi utilisés (Chevallard 2007, Douady 1986, Robert 1998, Winsløw 2008).

Chapitre 2. La dualité : genèse d'un savoir mathématique

Introduction

Après avoir présenté les cadres théoriques et la problématique de notre recherche, nous allons maintenant nous intéresser, comme annoncé, à la genèse historique de la dualité[10]. Nous considérons en effet, comme Dorier (2000), que la détermination des éléments qui ont permis l'émergence d'un savoir, son évolution dans la communauté scientifique, jusqu'à sa présence dans les institutions d'enseignement est de nature à éclairer la recherche en didactique concernant ce savoir. Cette détermination permet une prise de recul par rapport aux enjeux didactiques présents dans l'institution d'enseignement, et peut constituer un appui ou une référence lors de l'analyse des difficultés des étudiants. Ici nous nous intéressons plus précisément au repérage d'éventuelles ruptures épistémologiques au cours du processus qui a mené à la dualité algébrique moderne.

Nous ne prétendons pas ici faire une étude *historique* de la dualité. Nous n'avons en effet pas consulté de textes primaires sur le sujet car ce n'était pas là le propos de notre recherche. Pour les mêmes raisons, nous ne prétendons pas nous lancer dans l'*épistémologie* de la dualité, discipline qui peut par ailleurs être abordée selon différents courants[11]. Dorier (2000) évite d'ailleurs d'utiliser le substantif « épistémologie » dans ses travaux et préfère utiliser l'adjectif « épistémologique » dont il propose la définition suivante : « qui *est relatif à l'évolution des savoirs ou des connaissances* (pour nous ils seront toujours *mathématiques*) », en précisant que « *le terme* évolution *est à prendre au sens le plus large : elle peut concerner aussi bien un système, qu'une institution ou un individu, etc., de plus, elle ne se réduit pas seulement à l'idée de progrès, mais peut aussi se révéler être une stagnation ou un recul. En outre, les termes* savoirs *et* connaissances *sont à prendre ici dans un sens générique ; une connaissance est liée à un individu dans un rapport de mise en fonctionnalité relatif à un ensemble de situations déterminées, elle n'est susceptible de devenir un savoir qu'après dépersonnalisation et décontextualisation.* » (Dorier 2000, p. 13).

Ce que nous nous proposons de faire dans ce chapitre, c'est de présenter l'ensemble des éléments (au sens large) ayant contribué à faire émerger, progresser, diffuser les concepts relatifs à la dualité, c'est-à-dire que nous nous proposons d'étudier la *genèse* de la dualité. Et s'il nous arrive d'utiliser le terme *épistémologique*, c'est dans le sens défini par Dorier qu'il faudra l'interpréter.

Ainsi, dans notre enquête épistémologique de la dualité, nous avons fait un bilan de travaux d'historiens, et non un travail d'historien. Nous avons donc cherché à savoir de quelle manière les organisations mathématiques liées à la dualité ont émergé, et en lien avec quels autres concepts.

Dans ce chapitre, nous tentons donc de répondre aux questions suivantes :

Comment ont émergé les notions associées à la dualité dans la genèse historique de l'algèbre linéaire ? Des ruptures épistémologiques ont-elles été nécessaires ?

---

[10] Rappelons que, sans précision de notre part, par *dualité*, nous considérons la dualité en algèbre linéaire.

[11] Drouin (1991, p.28,29) parle d'épistémologie historique, d'épistémologie « a priori », d'épistémologie de science telle qu'elle fonctionne et d'épistémologie génétique.

Les éléments de réponse apportés à ces questions pourront constituer un point d'appui pour nos propositions d'enseignement de la dualité, notamment en termes de prérequis nécessaires (chapitre 1, § 2), ou de cadres de référence pour l'introduction de cet enseignement. Pour ce faire, nous nous allons nous concentrer sur les notions associées à la dualité, mais également sur d'autres domaines plus larges auxquels la dualité est reliée.

A propos du terme *dual*, Bertrand Hauchecorne, dans son dictionnaire historique et épistémologique du vocabulaire mathématique, écrit :

> *Dualité*, repris sur le latin *dualitas*, est attesté dans notre langue depuis Oresme à la fin du XIV^e siècle. On reconnaît dans ce mot la racine latine qui a donné *deux*. Le mot est peu usité jusqu'au XIX^e siècle. Il est alors repris et l'on crée l'adjectif *dual* pour désigner une relation de correspondance réciproque.
>
> Lors du développement de la géométrie projective au cours du XIX^e siècle, on appelle principe de dualité la transformation d'un théorème en un autre en intervertissant les termes droites concourantes et *points alignés*.
>
> Dans cette transformation se cachaient la relation intrinsèque entre les éléments d'un espace vectoriel et les formes linéaires qui s'y appliquent. Ceci explique le nom *espace dual* puis *dual* donné, lors de sa définition au début du XX^e siècle, à l'ensemble des formes linéaires sur un espace vectoriel. On exprime par ce nom, la relation réciproque entre l'espace et son dual. En dimension finie, par exemple, le dual de *E* admet, à un isomorphisme près, *E* lui-même pour dual. En dimension infinie, il n'y a plus qu'une inclusion.
>
> L'adjectif *dual* a été repris en sociologie, puis dans le discours politique pour désigner la société duale. Elle est composée de ceux qui vivent dans une marginalité, en dehors des structures de la société et de ses institutions. (Hauchecorne 2003, p. 59).

Le texte ci-dessus nous renseigne sur l'origine du nom donné au savoir mathématique qui est en jeu dans notre recherche. Cependant, il n'explicite pas les circonstances qui ont fait émerger les notions liées à la dualité en algèbre linéaire ni les éventuelles ruptures épistémologiques nécessaires à l'existence de ces notions. Pour décrire ces circonstances, nous présentons tout d'abord (§ 1) brièvement comment le concept de fonction, qui est à la base de la dualité, a émergé. Nous montrons ensuite (§ 2) que la dualité a permis de mettre au jour certaines notions pertinentes en algèbre linéaire, permettant ainsi l'apparition de la notion moderne de vecteur. Puis nous présentons les circonstances dans lesquelles certains thèmes du secteur dualité ont émergé, mettant ainsi en évidence le caractère unificateur et généralisateur des concepts d'algèbre linéaire (§ 3). Enfin (§ 4), à la lumière des éléments présentés, nous tirons quelques conclusions.

1. Une rupture épistémologique déterminante : la notion de fonction

Concentrons-nous dans un premier temps sur la notion de fonction. En effet, celle-ci est essentielle dans le concept moderne de dualité en algèbre linéaire puisque le dual est un ensemble de formes linéaires et que ces dernières sont en particulier des fonctions.

Pendant des siècles (vraisemblablement jusqu'au début du 18^ème siècle), les mathématiciens considéraient d'abord les problèmes mathématiques comme des problèmes géométriques ou physiques, avec un ancrage dans la réalité, le tangible. Les notions d'analyse par exemple, ont souvent été approchées par l'étude de la cinématique, ou de la trajectoire de mobiles (Dhombres 1987, p.193). Descartes par exemple, considère l'expression « $y = a\,x +$

b » comme étant la représentation d'une droite, mais pas comme la représentation analytique d'une fonction, ce concept n'existant pas encore sous sa forme actuelle (Dorier 1997).

La mise en place du calcul infinitésimal, notamment, va permettre de donner une signification abstraite aux notions mathématiques, se dégageant ainsi des habitudes antérieures. Un renversement de l'ordre logique de la présentation, voire de la construction des mathématiques s'imposait alors (Dhombres 1987, p.193).

Ainsi, en 1718, se dégageant de toute conception géométrique, Jean Bernoulli va voir en l'expression « $y = a\ x + b$ », précédemment établie par Descartes, un nouvel objet mathématique qu'il va appeler *fonction*. Pour bien distinguer la fonction f de la valeur y fonction de la variable x, la notation $y = f(x)$ est utilisée.

Un autre pas vers la notion moderne de fonction est franchi lorsqu'Euler publie en 1748 sont traité "*Introductio in analysin infinitorum*[12]", qui est le premier ouvrage dans lequel le concept de fonction joue le rôle principal. Le changement de mentalité dans l'ordre de pensée mathématique qui s'en suit est expliqué par Dhombres :

> Euler, et à sa suite les autres géomètres du 18ème siècle, rompent avec le langage, le choix et l'organisation des mathématiques antérieures. L'ordre d'exposition des principales notions d'analyse y [13] est, à peu de choses près, le même qu'aujourd'hui : rappels sur les éléments d'algèbre et les propriétés des nombres, étude des fonctions, des suites, puis calcul différentiel et intégral ; viennent après seulement les applications à la géométrie, à la mécanique, etc. Ce bouleversement de l'architecture dans l'édifice mathématique constitue une rupture épistémologique dans l'histoire de cette discipline. (Dhombres 1987, p. 193).

Ainsi, l'émergence du concept moderne de fonction, que l'ouvrage d'Euler cité ci-avant a permis de diffuser dans la communauté scientifique, a produit un véritable renversement dans la façon de penser les mathématiques. Ces dernières se détachent maintenant du monde du tangible pour s'exposer a priori, présentant seulement ensuite leurs applications au monde du réel (géométrie, mécanique, etc.).

Remarquons tout de même que nous parlons ici de fonctions de scalaires. Il faudra pratiquement attendre la fin du 19ème siècle pour que Volterra introduise dans ses travaux une fonction d'une autre fonction.

On peut donc le constater, la notion de fonction est un concept relativement récent dans l'histoire des mathématiques. L'émergence de ce concept a alors bouleversé l'ordre établi jusqu'alors en mathématique. La dualité en algèbre linéaire, qui a à sa base le concept de fonction, n'a donc pu émerger qu'après cette rupture épistémologique.

2. Une dualité naturelle comme source d'émergence et niche de notions élémentaires en algèbre

A l'heure actuelle, nous savons que nous pouvons bien entendu relier la notion de formes linéaires à la notion de système d'équations linéaires (voir chapitre 1, § 2.5 et 3.2). En effet, l'étude d'un système d'équations linéaires comme par exemple $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$ peut se

[12] Introduction à l'analyse des infinis.
[13] Dans l'ouvrage « introduction à l'analyse des infinis » de 1748.

ramener à l'étude des *formes linéaires* y_1, y_2, y_3 définies par : $\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$: $y_1(x) = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4$, $y_2(x) = 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4$, $y_3(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4$. L'analyse épistémologique des formes linéaires passe donc par celle des équations linéaires que nous allons développer maintenant. Nous pourrons nous rendre compte que l'étude qualitative des systèmes d'équations linéaires a permis l'émergence, à travers une dualité naturelle entre équations et solutions, de notions élémentaires en algèbre linéaire, tels le rang ou la notion moderne de vecteur, en tant que concepts unificateurs.

2.1. Les équations linéaires : de l'antiquité à Euler

Les systèmes d'équations linéaires étaient déjà connus depuis l'antiquité, et des techniques de résolution (par élimination ou substitution) avaient été mises au point. Cependant, même si l'on peut observer une volonté de classification des équations, l'intérêt porté à ces dernières n'avait qu'un seul but : leur résolution. De tels systèmes n'étaient considérés à l'époque que pour en dégager la solution. Seule celle-ci importait.

Alors que, dans la seconde moitié du 18ème siècle, la plupart des mathématiciens se consacrent au calcul différentiel et intégral[14], Euler fait partie des quelques chercheurs qui reviennent aux problèmes qu'avaient traités les algébristes de la Renaissance, et qui étaient considérés par certains comme dépassés et sans grand intérêt scientifique : la résolution des équations numériques.

En 1750, dans son texte "Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes", Euler, se penchant sur un système d'équations linéaires, s'intéresse non seulement à la solution de celui-ci, mais prend aussi en considération les équations elles-mêmes. Bien que considérant comme un "accident" le fait que deux équations d'un système linéaire puissent être identiques, il est sans doute le premier à énoncer des conditions pour qu'un système de *n* équations à *n* inconnues ait une solution unique, ce qui semblait être une évidence jusqu'alors (Dorier 2000, p.27-29) !

> Quand on soutient que pour déterminer *n* quantités inconnues il suffit d'avoir n équations qui expriment leur rapport mutuel, il faut y ajouter cette restriction que toutes les équations soient différentes entr'elles, ou qu'il n'y en ait aucune qui soit renfermée dans les autres. (Euler 1750, cité par Dorier 1997, p. 29).

L'approche nouvelle, descriptive et qualitative, des systèmes d'équations linéaires qu'Euler adopte ainsi l'amène à découvrir ce que Dorier (1997, p.29) nomme la *dépendance inclusive* : le fait qu'une *équation* soit "comprise" ou "enfermée" dans une autre. En considérant par exemple les deux équations suivantes :

$$3x - 2y = 5 \qquad \text{et} \qquad 4y = 6x - 10 \quad ,$$

Euler commente :

> On verra qu'il n'est pas possible d'en déterminer les deux inconnues x et y, puisqu'en éliminant l'une x, l'autre s'en va d'elle même et on obtient une solution identique, dont on est en état de déterminer rien. La raison de cet accident saute d'abord aux yeux, puisque la seconde équation se change en 6x - 4y = 10, qui n'étant que la première 3x - 2y = 5 doublée, n'en diffère point. (Euler 1750, cité par Dorier 1997, p. 28).

[14] Le calcul différentiel et intégral de l'époque atteint déjà un haut niveau de technicité, notamment avec des équations aux dérivées partielles.

Le concept de *dépendance inclusive* introduit par Dorier diffère du concept de *dépendance linéaire* utilisé en algèbre linéaire. En effet, la dépendance inclusive ne s'applique qu'à des équations linéaires, alors que la dépendance linéaire, qui n'apparaîtra que bien plus tard, est un concept unificateur qui s'applique à des objets divers (polynômes, fonctions, etc.). Euler ne traite pas les n-uplets (les inconnues) de la même manière que les équations. Par exemple, Euler n'explicite pas les relations linéaires qu'il décèle entre les équations (comme par exemple $e_1 = 2.e_2$). Son approche, bien que nouvelle, ne permet donc pas encore d'aboutir à un concept généralisateur comme celui de dépendance linéaire.

De plus, l'approche adoptée par Euler en détectant des relations entre des équations linéaires, bien qu'étant qualitative, n'en reste pas moins toujours tournée vers la résolution. Dans cette optique, il ne considérera pas d'une même manière des objets différents (n-uplets et équations).

Euler poursuit ses travaux sur les systèmes d'équations linéaires : il entrevoit, de manière empirique, la complémentarité entre le nombre de relations de dépendance des équations et le nombre d'indéterminations des inconnues. Euler dégage ainsi une première idée de ce qui se traduira plus tard par le concept de *rang*. En effet, un mathématicien actuel traduirait la complémentarité observée par Euler comme une relation entre :

- le nombre d'équations indépendantes,
- la taille de l'ensemble des solutions,
- le nombre de paramètres nécessaires pour décrire l'ensemble des solutions.

Même si des liens sont mis au jour par Euler entre les inconnues et les équations, nous ne parlerons pas encore de dualité ici car, nous l'avons souligné, Euler ne traite pas de la même manière les n-uplets (inconnues) et les équations. Le concept de *dépendance inclusive* qu'il utilise pour les équations lui permet certes une approche intuitive des systèmes d'équations linéaires, mais l'empêche de considérer de façon identique un n-uplet et une équation (ce que nous avons fait lors de la description du secteur dualité, chapitre 1, § 2.5 puisque nous disposons des théories modernes).

L'approche mise au jour par Euler ne verra pas sa lancée se poursuivre car un autre concept va émerger et prendre le dessus sur l'observation des équations linéaires : les déterminants.

2.2. Intermède : la théorie des déterminants

En 1750, les scientifiques découvrent, grâce à l'"*Introduction à l'analyse des courbes algébriques*" écrite par Cramer, une des premières notations qui va permettre d'écrire un système d'équations linéaires avec des coefficients indéterminés.

Grâce à l'introduction de ces notations, Cramer établit des règles de calcul permettant de résoudre un système carré[15]. Il n'utilise pas le terme *déterminant* [16], mais c'est bien de cette notion qu'il s'agit. Il explicite les calculs pour $n = 2$ et $n = 3$, et affirme que la généralisation à $n > 3$ est aisée. Il admet implicitement que le déterminant principal est non nul, ce qui signifie que le système admet une unique solution. Ce fut le point de départ de la théorie des déterminants qui vit se développer de nombreuses règles de calcul[17]. Par la suite, la technicité

[15] Un système carré est un système qui comporte autant d'équations que d'inconnues.
[16] Le terme « déterminant » sera utilisé par Gauss en 1801 dans un autre contexte, pour désigner un ensemble de nombres qui *déterminent* une propriété mathématique (Baudet 2002, p.195).
[17] Ce n'est qu'en 1812 que Cauchy donna une première approche théorique en essayant de donner une définition aux déterminants qui ne soit pas une règle de calcul.

des démarches, qui visait une résolution effective du système, empêchait alors de développer une étude *qualitative* des systèmes d'équations linéaires, qui auraient pu mener au concept de dualité. Des notions émergent, telles la notion de mineur de plus grand ordre non nul (lorsque le déterminant d'un système carré d'équations linéaires s'annule). Mais les notions mises au jour servent d'outils (Douady 1986) pour la recherche de solutions du système, et ne sont pas étudiées en tant que telles pour essayer de dégager des invariants d'un système d'équations. Ainsi, le mineur de plus grand ordre non nul permet-il de dégager les notions d'inconnues (et équations) principales et secondaires ; les méthodes de Cramer étaient ensuite appliquées pour déterminer les solutions. On peut donc dire, avec le vocabulaire actuel, que le lien entre le nombre d'équations indépendantes dans le système et la dimension de l'ensemble des solutions était *implicitement* présent, vu l'accent qui était mis sur la fonctionnalité *outil* du système d'équations linéaires : toute l'attention était portée sur la détermination des solutions ; une fois celles-ci trouvées, on ne cherchait pas à faire des liens entre les différents résultats obtenus.

2.3. Des déterminants aux matrices

En 1812, Cauchy reprend le terme *déterminant* pour désigner la forme $ab'-a'b$ de Cramer, qui détermine en effet si le système de deux équations à deux inconnues ayant les coefficients a, b, a' et b' possède ou pas une solution unique. En 1826, Cauchy utilise le terme *tableau* pour désigner ces nombres que les mathématiciens avaient pris l'habitude de disposer de la manière suivante :

$$\begin{matrix} a & b \\ a' & b' \end{matrix}$$

On pouvait alors calculer le déterminant de ce tableau, au moyen des règles de calcul énoncées ($ab'-a'b$). La notation, toujours utilisée actuellement, représentant le déterminant par son tableau entouré à gauche et à droite par un segment vertical :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

fut introduite la première fois par Cayley en 1841.

Cayley, en travaillant sur la généralisation des déterminants, inventera en 1858 le concept de *matrice* : une matrice est un tableau de nombres (comme le tableau d'un déterminant), mais le nombre de lignes n'est plus nécessairement le même que celui des colonnes. Il exposera ses idées dans l'article "A memoir on the theory of matrices" (1858) paru dans « Philosophical Transactions » (Londres). Cayley étudie dans un premier temps les matrices carrées d'ordre 2 et d'ordre 3, mais affirme que ses propos s'étendent aux matrices rectangulaires d'ordre (n,p). Il définit la somme et le produit de deux matrices, ainsi que *la transposée* d'une matrice (qu'il note tr.A). Il donne l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 et introduit les matrices symétriques et antisymétriques.

On peut donc remarquer que la notion de matrice transposée a été introduite par Cayley dans le cadre matriciel avant que la notion d'application transposée n'ait été introduite.

2.4. Des matrices aux vecteurs

Parallèlement aux développements sur les déterminants et les matrices, des travaux sont menés sur les nombres imaginaires, sur les groupes, sur les transformations en géométrie, etc., tant de notions qui peuvent se retrouver unies dans les concepts « modernes » de l'algèbre linéaire. Mais il faudra encore un peu de temps pour arriver à la notion moderne de *vecteur* (c'est-à-dire un élément d'un espace vectoriel) qui permet de dégager un même objet à travers ces différentes représentations.

En 1843, Hamilton fera un premier pas dans cette direction en développant sa théorie sur les quaternions. Le point de départ de son raisonnement est le suivant : on sait que les nombres réels peuvent être représentés sur une droite (dimension 1) et réciproquement, les points d'une droite peuvent être considérés comme des nombres réels. Dans le même ordre d'idées, les nombres complexes peuvent être représentés dans un plan (dimension 2), tout comme les points du plan peuvent être représentés par des nombres complexes. Ainsi, effectuer des calculs sur les points d'une droite ou d'un plan revient à effectuer ces calculs sur les nombres, réels ou complexes respectivement, les représentant. Bien entendu, les règles de calculs définies dans les nombres réels ou complexes respectent ce que les mathématiciens de l'époque appelaient le « principe de permanence », et que nous expliquerions aujourd'hui par le fait que les réels et les complexes peuvent être munis d'une structure de corps commutatif.

Se pose alors la question de la généralisation de ce raisonnement à la dimension supérieure : est-il possible de trouver un corps de nombres permettant de représenter l'espace (dimension 3) ? Par analogie avec la dimension 2 où la multiplication de deux couples de nombres (a, b) par (a', b') revient à multiplier le nombre complexe $a + b.i$ par le nombre complexe $a' + b'.i$, où $i^2 = -1$, Hamilton cherche à multiplier non plus des couples mais des triplets. Il n'y parviendra pas, étant donné que comme on le sait aujourd'hui, la seule dimension où on peut construire un corps de dimension supérieure à 2 est la dimension 4. Après ses insuccès avec les triplets, Hamilton eut alors l'idée, en 1843, de considérer non plus des triplets, mais des quadruplets (s, x, y, z) définissant ainsi les quaternions, en s'inspirant du modèle des nombres complexes : un quaternion q est défini par $q = s.u + x.i + y.j + z.k$, où $u^2 = 1$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k,\ jk = i, ki = j$, $ji = -k, kj = -i, ik = -j$. Remarquons au passage que la multiplication de deux quaternions n'est alors pas commutative. Au quaternion q est associé le point de coordonnées (x, y, z) dans l'espace. Hamilton appellera « vecteur » la partie $x.i + y.j + z.k$ du quaternion q.

L'introduction des quaternions aura également comme effet immédiat de susciter toute une série de recherches sur des « calculs » possibles dans les espaces $\mathbb{R}^n$ (Dieudonné 1986, p.105). Ainsi, des espaces à n dimensions pouvaient être considérés.

Comme nous l'avons mentionné, les matrices ont fait leur apparition peu de temps après la découverte des quaternions par Hamilton. La multiplication matricielle, elle non plus, n'est pas commutative. Le calcul matriciel montre qu'il y a des analogies entre les matrices et les vecteurs.

Pour clarifier la notion moderne de vecteur, plusieurs acteurs seront encore nécessaires. Citons tout d'abord Adhémar Barré de Saint-Venant qui, en 1845 publie un article « Mémoire sur les sommes et les différences géométriques, et sur leur usage pour simplifier la Mécanique » (Baudet 2002, p.198). Sain-Venant y présente des opérations sur des segments de droites analogues aux opérations algébriques sur les nombres. Plus tard, ces segments de droite seront représentés par des flèches dans le plan ou l'espace. On y reconnaît ce que nous appelons maintenant le vecteur géométrique (Hillel 1997). Ensuite les travaux de l'Allemand Hermann Grassmann en 1844, ceux de l'Anglais William Clifford en 1878 et ceux de l'Américain Josiah Gibbs (il publie *Vector Analysis* en 1881) vont compléter l'œuvre de Saint-Venant en s'interrogeant sur ce que pourrait signifier la multiplication de deux vecteurs.

Dans « Die Lineale Ausdehnungslehre[18] » qu'il publie en 1844, Grassmann annonce qu'il présente une nouvelle discipline mathématique qui ne se situe pas seulement dans le domaine géométrique, mais dont la géométrie n'est qu'une application spéciale (in Dorier 1997, p.44). Grassmann, véritable précurseur de l'algèbre linéaire par son approche, ne fut pas suivi par ses pairs. Son discours, bien que formel, fut jugé trop philosophique dans un premier temps. En 1862, il publiera une réécriture de sa théorie en estompant les propos philosophiques, mais il ne fut pas davantage suivi par la communauté scientifique. L'œuvre de Grassmann, qui contenait de très nombreux résultats que l'on retrouve actuellement en algèbre linéaire[19], fut donc ignorée par les mathématiciens de l'époque. Ce n'est que plus tard que l'on se rendra compte de sa valeur. Nous n'avons pas effectué dans notre recherche une exploration de l'œuvre de Grassmann en ce qui concerne la dualité, car cela dépassait le cadre de nos questions de recherche. Nous reviendrons sur ce point dans la proposition de perspectives à notre travail.

2.5. La notion moderne de vecteur à travers la dualité

La conception que Dorier désigne par *dépendance inclusive*, que nous avons évoquée ci-dessus, a prévalu pendant plus d'un siècle dans les problèmes de recherche de solutions des systèmes d'équations linéaires. Rappelons-le, cette notion, en ne s'appliquant précisément qu'à des équations linéaires, empêchait de considérer d'une même manière des n-uplets de solutions et des équations d'un système, ne permettant pas par la même occasion une évocation de dualité. Un premier raisonnement dual est mis en œuvre par Frobenius en 1875 : dans "*Über das Pfaffsche Problem*", il définit en termes modernes la notion de *dépendance* et d'*indépendance linéaire* à la fois pour les *n*-uplets **et** pour les équations linéaires. Cette notion **commune** appliquée à des objets jusqu'alors considérés différemment nous dirige aussi vers la notion moderne de *vecteur*.

Frobenius introduit aussi la notion de base de solutions (sans toutefois utiliser ces termes) et la notion de *système adjoint* (adjungirt) ou *associé* (zugeordnet), faisant ainsi un bond énorme vers le concept de dualité. En effet, le système adjoint à un ensemble de *n*-uplets solution d'un système d'équations linéaires est "*composé d'équations dont les coefficients sont les composantes des éléments d'une base de solutions du système initial*." (Dorier 1997, p.32).

Voici le raisonnement suivi par Frobenius (Frobenius 1875, cité par Dorier 2000, p.60) :

Considérons le système suivant : $\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{p1}x_1 + ... + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$ (I)

Si $(A_1^{(\chi)}, A_2^{(\chi)}, ..., A_n^{(\chi)})$ $(\chi = 1, 2, ..., n-r)$, r étant l'ordre maximal des mineurs non nuls, est une base de solutions de (I), le système associé est :

$$\begin{cases} A_1^{(1)}x_1 + ... + A_n^{(1)}x_n = 0 \\ \qquad ... \\ A_1^{(n-r)}x_1 + ... + A_n^{(n-r)}x_n = 0 \end{cases} \qquad \text{(I*)}$$

[18] Die Lineale Ausdehnungslehre a été écrite par Grassmann comme constituant la première partie d'une théorie, « Die Ausdehnungslehre », qui se traduit littéralement par « La théorie de l'extension ».
[19] Comme par exemple l'équivalent du théorème dim(E+F)=dim(E)+dim(F)-dim($E \cap F$).

> Maintenant si $(B_1^{(\mathcal{V})}, B_2^{(\mathcal{V})}, ..., B_n^{(\mathcal{V})})$ $(\mathcal{V} = 1, 2, ..., q)$ est une base de solutions de (I*), le système associé est :
>
> $$\begin{cases} B_1^{(1)}x_1 + ... + B_n^{(1)}x_n = 0 \\ \qquad ... \\ B_1^{(q)}x_1 + ... + B_n^{(q)}x_n = 0 \end{cases} \qquad \text{(I**)}$$
>
> Frobenius démontre que, quel que soit le choix des bases à chaque étape, le système (I**) est équivalent au système (I) et que q = r.

En considérant le système adjoint (I*) à un ensemble de *n*-uplets solution d'un système d'équations linéaires, Frobenius utilise le concept moderne de dualité. Il réitère son raisonnement en travaillant avec le système adjoint du système adjoint précédemment considéré. Bien entendu, Frobenius n'a pas conscience du théorème de réflexivité, mais c'est bien ce dernier qui est appliqué ici. Par le raisonnement décrit ci-avant, Frobenius montre donc que l'ordre maximal d'un mineur non nul du système linéaire (I), noté *r*, est égal à l'ordre maximal d'un mineur non nul du système linéaire (I**), noté *q*. Ce raisonnement étant valable pour tout système d'équations linéaires, Frobenius montre donc que l'ordre du plus grand mineur non nul d'un système d'équations linéaires est un ***invariant*** du système. Et il montre aussi aisément qu'il s'agit d'un invariant de l'ensemble des solutions : des systèmes ayant même ensemble de solutions, ont aussi même ordre maximal de mineur(s) non nul(s). Enfin, Frobenius montre que ce nombre permet également de mesurer la taille de l'ensemble des solutions, ainsi que le nombre maximal d'équations linéairement indépendantes dans le système linéaire.

Ce n'est qu'en 1879 que Frobenius donne un nom à l'ordre maximal de mineur non nul : le *rang*. Notons qu'à l'époque, le rang ainsi défini est lié au déterminant :

> Quand dans un déterminant, tous les mineurs d'ordre *m*+1 s'annulent, mais que ceux d'ordre *m* ne sont pas tous nuls, j'appelle rang du déterminant la valeur de *m*. (Frobenius 1879, cité par Dorier 1997, p. 32)

Frobenius applique ses découvertes à des problèmes d'équations différentielles et à l'étude des formes quadratiques et bilinéaires, faisant ainsi un pas vers l'unification et la généralisation.

Un apport intéressant pour l'étude de la dualité serait un approfondissement de la réflexion sur le lien entre la dualité, au sens actuel, et la conceptualisation par Frobenius de la notion de rang, dans le cadre des systèmes d'équations. Cette réflexion dépassant largement les questions de recherche qui nous préoccupent ici, nous la proposons dans les perspectives de notre travail.

2.6. La recherche d'invariants

Si Frobenius définit certains concepts modernes de l'algèbre linéaire, il n'est pas le seul à cette époque à permettre des avancées dans ce qui deviendra l'algèbre linéaire. Dans la seconde moitié du 19ème siècle, différents problèmes arithmétiques, géométriques ou physiques ont amené les mathématiciens à considérer la classification des formes bilinéaires. Pour ce faire, ils recherchent des invariants par substitutions linéaires des variables dans ces formes. Parallèlement, des scientifiques recherchent des invariants dans les tableaux de nombres, étant donné que les matrices permettent de représenter des formes bilinéaires, des formes quadratiques ou des substitutions linéaires (Dorier 2000, p.62).

La recherche d'invariants amène les scientifiques à considérer les systèmes d'équations linéaires dans une autre perspective que celle de leur résolution.

3. L'algèbre linéaire : nouvelle rupture épistémologique

Nous avons montré (§ 1) que l'introduction de la notion de fonction a constitué une véritable rupture épistémologique dans l'histoire des mathématiques, et que le cadre des systèmes d'équations linéaires a servi de niche à l'émergence de plusieurs concepts qui font désormais partie de concepts élémentaires de l'algèbre linéaire ; certains de ces concepts étant explicitement ou implicitement liés à la dualité (§ 2). Nous allons maintenant expliquer pourquoi l'introduction de ce qui deviendra l'algèbre linéaire peut aussi être qualifiée de rupture épistémologique.

3.1. L'introduction d'une approche axiomatique

On se rappelle le mauvais accueil réservé par la communauté scientifique aux travaux de Grassmann (1844 et 1862), véritable précurseur de l'algèbre linéaire. Les bases de la théorie de Grassmann ont ensuite été reprises par certains mathématiciens, et des premières approches *axiomatiques* des problèmes linéaires ont ensuite vu le jour (Peano 1888, Pincherle 1890 et 1901,…). Les premières approches axiomatiques du linéaire n'ont cependant pas pour but premier la résolution de problèmes nouveaux, mais tentent d'établir un socle sur lequel pourraient reposer les mathématiques, comme l'explique Dorier :

> En ce sens, il est clair que l'approche axiomatique représente pour Peano un enjeu théorique répondant à la question des fondements mathématiques et nullement un moyen de permettre la résolution de nouveaux problèmes. (Dorier 1997, p. 63).
>
> L'approche axiomatique apparaît comme une volonté de donner de meilleurs fondements à l'ensemble des résultats sur l'algèbre linéaire en dimension finie, déjà acquis à la fin du 19e dans le cadre des coordonnées. Dès 1888 Peano dit que certains systèmes linéaires peuvent être de dimension infinie et cite le seul exemple des polynômes. De fait, si la possibilité de modéliser des problèmes nouveaux est suggérée, c'est surtout une réorganisation des résultats déjà acquis qui est proposée. (Dorier 1997, p. 75).

Pendant plusieurs dizaines d'années, l'approche axiomatique qui se développait ne fut pas adoptée par nombre de scientifiques qui continuaient à utiliser les méthodes analytiques qu'ils maîtrisaient plutôt que d'investir dans un nouveau mode de pensée qu'était l'approche axiomatique de l'algèbre linéaire, et ce même lorsqu'ils travaillaient sur des problèmes en dimension infinie. Ces derniers étaient résolus, par analogie avec la dimension finie, à l'aide des *techniques calculatoires* que les mathématiciens de l'époque maîtrisaient (développement en série de fonctions, déterminants, etc). Ainsi en est-il par exemple pour le *principe des réduites*[20] : la résolution d'un système d'une infinité d'équations linéaires en une infinité d'inconnues se faisait par l'étude du sous-système tronqué d'ordre *n*, puis par passage à la limite lorsque *n* tendait vers l'infini.

3.2. Emergence de concepts modernes de la dualité à partir de travaux en dimension infinie

Dans le cadre de problèmes linéaires en dimension infinie issus de la mécanique, Fredholm résolvait, au tout début du 20ème siècle, l'équation

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y)\varphi(y)dy = \Psi(x) \qquad (1)$$

[20] Le *principe des réduites* a été proposé par J. Fourier dès 1822, mais est resté dans l'oubli pendant près de 50 ans. Ce n'est qu'à la fin du 19ème siècle qu'il fut véritablement utilisé comme outil par les scientifiques (Dorier 1997, p. 78).

à l'aide d'outils analytiques (Dorier 1997, p.79-81), où sa démarche le ramène aussi à un système fini d'équations linéaires. Précisons que résoudre (1) revient à déterminer φ, f et Ψ étant connues. La raison pour laquelle nous mentionnons les travaux de Fredholm ici est que ce faisant, il va introduire un point de vue nouveau pour l'époque : alors que le concept d'espace fonctionnel n'est pas encore apparu, Fredholm va considérer une équation fonctionnelle comme la transformation d'une fonction en une autre fonction *en vue de résoudre* l'équation (1) :

> En considérant l'équation (1) comme transformant la fonction $\varphi(x)$ en une nouvelle fonction $\Psi(x)$ j'écris cette même équation
>
> (2) $S_f\varphi(x) = \Psi(x)$,
>
> et je dis que la transformation S_f appartient à la fonction $f(x, y)$. Les transformations (2) forment un groupe. (Fredholm 1903, cité par Dorier 1997, p. 81)[21]

Ainsi, Fredholm a eu l'idée novatrice d'introduire un opérateur en vue de résoudre une équation fonctionnelle.

Toujours lors de la résolution de l'équation (1), Fredholm montre que, sous certaines conditions, une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution est que

$$\int_0^1 \Psi_k(x)\varphi(x) = 0; \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

où les Ψ_k représentent n solutions indépendantes de l'équation homogène. Nous reconnaissons dans les égalités (3) la notion d'orthogonalité, mais ce point de vue n'apparaîtra que quelques années plus tard grâce à Schmidt[22], ce qui indique qu'un vocabulaire géométrique va ainsi pouvoir être introduit dans le cadre des fonctions. Cependant, aucune approche formelle généralisatrice ne fut mise en place dans l'immédiat, car les mathématiciens étaient focalisés sur la *résolution* des problèmes traités.

Par la suite, les mathématiciens seront amenés à travailler sur des généralisations de plus en plus importantes des équations de Fredholm, en considérant ainsi de nouveaux espaces de fonctions. C'est ainsi que Riesz introduit en 1910 les espaces L^p, avec p>1. Des travaux de Riesz et Schmidt, les mathématiciens prennent l'habitude de penser dans les espaces fonctionnels en termes géométriques. C'est également Riesz qui va introduire la notion d'opérateur *adjoint* ou *transposé* pour *T*, opérant sur l'espace L^p (Kline 1972, p.1087), et établir les relations de dualité entre L^p et L^q, quand $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Dorier 1997, p.87). Riesz n'utilise cependant pas le terme de dualité.

Remarquons que si le concept d'opérateur transposé et des relations de dualité ont été mis au jour par Riesz, ils l'ont été dans le cadre d'espaces topologiques et non dans le cadre d'espaces algébriques, dont l'approche axiomatique n'a pas encore été finalisée à ce stade de l'histoire des mathématiques.

Par la suite, Riesz poursuivra son approche abstraite des espaces fonctionnels. Dans un travail qu'il publie en 1922, Hahn, qui cherche avant tout à unifier des problèmes précis d'analyse dans une théorie générale, définit de façon axiomatique un *espace linéaire*, qui

[21] La numérotation des équations a été modifiée pour être cohérente avec notre texte.
[22] C'est Schmidt qui introduira, dans sa thèse en 1905, l'adjectif orthogonal pour qualifier deux fonctions dont le produit scalaire est nul (Escofier 2006, p.331).

correspond à la notion moderne d'espace vectoriel normé. Cinq ans plus tard, il met en place les premiers résultats théoriques sur la notion d'espace dual, dans le sens moderne d'espace dual topologique (Dorier 1997, p.89).

Il est important ici de constater que les premières notions formelles de dualité ont été mises au jour dans le cadre de l'analyse fonctionnelle, et ont été développées pour répondre à un besoin d'outil (Douady 1986) dans la résolution de problèmes. Il aurait été intéressant de pouvoir développer une réflexion sur les usages et fonctions de la dualité dans l'émergence historique de l'analyse fonctionnelle. Cette réflexion dépasse cependant le cadre de notre travail, elle nécessiterait une recherche spécifique.

3.3. Des notions unificatrices et formalisatrices

Une définition axiomatique de la notion d'espace vectoriel normé complet sera donnée par Banach, Hahn et Wiener à peu près à la même époque (1920-1922) et de façon indépendante cependant. Sur base des travaux de ces derniers, Fréchet définira vers 1925 la notion d'espace vectoriel abstrait, et ensuite la notion d'espace affine abstrait.

Banach imposera l'approche axiomatique avec son livre *Théorie des opérateurs linéaires*, publié en 1932. Dans l'introduction de son ouvrage, il justifie l'économie que lui permet d'obtenir l'approche qu'il présente en disant qu'il établira des théorèmes dans un cadre général, puis il les spécifiera pour chaque ensemble de fonctions vérifiant les quelques axiomes posés au départ (Dorier 2000, p.32).

Nous avons vu que, si la notion de fonction a pu émerger au 18ème siècle, il a encore fallu attendre un peu pour voir définir les premières notions d'algèbre linéaire. L'approche axiomatique propre à l'algèbre linéaire ne s'est imposée quant à elle qu'à partir de 1930. Ainsi, durant près de 40 ans, l'approche analytique a été privilégiée par de nombreux mathématiciens.

Il semble donc qu'autour des équations de Fredholm aient convergé, au début du 20ème siècle, les approches géométrique, analytique et fonctionnelle. Ce lieu de rencontre a mis en évidence la pertinence d'une approche axiomatique afin de permettre l'unification et la généralisation des différentes approches envisagées.

Enfin, notons que la diffusion de l'algèbre linéaire dans la communauté des chercheurs et à travers l'enseignement universitaire fut facilitée par la parution en 1941 de la première édition de l'ouvrage de Birkhoff & Mac Lane (1941) et la parution en 1942 de la première édition du livre d'Halmos (1942). Nous reparlons de ces manuels dans le chapitre 3 traitant de la dualité comme savoir à enseigner.

4. Un regard épistémologique sur la dualité, synthèse

4.1. La dualité, liée à l'émergence de concepts pertinents en algèbre linéaire

La genèse historique de la dualité présentée ci-dessus montre que le concept de dualité a joué un rôle central dans l'émergence du concept de rang. C'est dans le cadre des systèmes d'équations linéaires que Frobenius a mis en lumière le concept de rang, en utilisant le concept de *système adjoint* à un ensemble de *n*-uplets solution d'un système d'équations linéaires, mettant ainsi en œuvre une dualité naturelle. Frobenius fait encore un pas en direction de la dualité en appliquant la définition de dépendance linéaire de manière identique à des *n*-uplets et à des équations, unifiant ainsi des objets considérés jusqu'alors différemment : un premier pas vers la notion moderne de vecteur en algèbre linéaire.

On peut donc affirmer au vu des développements présentés ci-avant que la dualité était présente et a parfois même joué un rôle central dans l'émergence de concepts en algèbre linéaire, dans le cadre des systèmes linéaires.

4.2. Des objets et non des outils

Cependant, l'analyse qui précède nous a aussi permis de constater que, pour que les liens unissant *n*-uplets et équations puissent être mis au jour, il a fallu qu'au départ, on considère les équations comme des objets et non plus comme des outils. Or, on constate que, dans l'enseignement actuel en Belgique, ni la notion d'équation, ni celle de *n*-uplet n'a jamais eu (au moins avant l'université) le statut d'objet mathématique. On les utilise sans les définir, faisant ainsi d'eux ce que Chevallard appelle des objets paramathématiques. Ainsi, si l'on souhaite aborder la dualité à partir des équations linéaires, il faudrait prévoir un enseignement préliminaire permettant aux étudiants de rencontrer celles-ci en tant qu'objets.

De plus, on constate qu'historiquement, les concepts de rang et de dualité sont extrêmement liés. En effet, pour arriver au concept de rang, il a fallu que Frobenius fasse émerger la notion moderne de vecteur, ce qui a permis de considérer semblablement une équation et un *n*-uplet (représentant la solution). C'est en observant ainsi le caractère dual existant entre ces deux objets que le concept de rang a pu être mis en évidence.

4.3. Evolution des concepts, séparation des liens originaux

Si l'on observe ce qui se passe dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, on constate que le concept de rang a évolué depuis sa mise en évidence par Frobenius. En effet, si le rang était lié au déterminant dans la définition qu'en donnait Frobenius, il est maintenant présenté comme une quantité en lien direct avec une application linéaire puisqu'il peut être défini comme la dimension de l'(espace vectoriel) image de l'application. Le caractère simplificateur de l'algèbre linéaire, en jouant son rôle, masque ainsi le lien entre le rang et la dualité.

4.4. Parlons de dimension

Une autre remarque importante que l'on peut tirer des sections ci-avant est que c'est en dimension *finie* que Frobenius a dégagé un premier résultat de dualité. Cela nous conforte dans l'idée que la dualité n'est pas un concept qui est à reléguer dans les matières inabordables pour les étudiants novices en algèbre linéaire. En effet, de tels étudiants n'ont en général pas encore abordé la dimension infinie, mais peuvent donc tout de même côtoyer la dualité par une approche semblable à celle de Frobenius.

En comparaison, le concept d'*espace vectoriel*[23] n'a vraiment émergé quant à lui qu'en rapport à des questions de dimension infinie en analyse fonctionnelle. Or, au niveau du savoir enseigné, le concept d'*espace vectoriel* est introduit (en première année d'université) bien avant que de telles questions ne puissent être abordées avec les étudiants.

Remarquons cependant que la notion d'application transposée par exemple, que nous avons répertoriée comme étant un thème du secteur dualité, n'a émergé que dans le contexte d'espaces fonctionnels munis d'une topologie. On est loin des systèmes d'équations linéaires qui ont servi de cadre aux premiers résultats obtenus en utilisant la dualité.

[23] C'est tout d'abord la notion l'espace vectoriel normé qui a émergé, puis le caractère simplificateur de l'algèbre a donné lieu à la notion d'espace vectoriel (algébrique).

4.5. Des notions FUGS

Ainsi donc, l'*espace vectoriel dual* d'un espace vectoriel donné n'a pu quant à lui émerger qu'après que le formalisme de l'algèbre linéaire fut mis en place. Ce concept peut donc être qualifié à la fois de formalisateur, unificateur, généralisateur et simplificateur (Robert 1998). Formalisateur en effet car sans l'introduction d'un formalisme, les différentes approches présentées dans ce chapitre n'auraient pas pu être mises au jour. Nous avons montré le caractère unificateur dans la section précédente (section 3.3) étant donné que c'est par la convergence des approches analytiques, géométriques et fonctionnelles qu'a pu émerger et se diffuser l'approche axiomatique. Le caractère généralisateur se comprend aisément étant donné que c'est un des buts de l'approche axiomatique, comme le décrivait Banach dans l'introduction de son ouvrage en 1932. Enfin, simplificateur en effet, car la notion de dual en algèbre linéaire est en quelque sorte une version épurée de la notion d'espace dual topologique qui, historiquement, a d'abord émergé.

4.6. Deux approches de la dualité

L'analyse présentée dans ce chapitre montre qu'il existe, au moins, deux approches possibles de la dualité.

Une première approche pourrait être celle qui permet d'appréhender la dualité sans nécessairement l'étudier comme un objet à part entière. C'est cette approche qui a permis de faire émerger un concept central en algèbre linéaire, à savoir le concept de rang. L'approche abordée par Frobenius relève de ce premier type. Cette approche est donc ancrée dans le cadre des systèmes linéaires. Il s'agit de la dualité entre les équations d'un système et l'ensemble des solutions de ce dernier. Nous appelons cet abord l'approche *naturelle*.

Une autre approche consiste justement à présenter la dualité comme un objet d'étude. On peut donc qualifier cette approche de *formelle*. En effet, elle résulte de la formalisation des thèmes définis pour le secteur dualité. Ainsi, par exemple, des formes linéaires représentent les équations d'un système, alors que les solutions sont elles considérées comme des éléments de l'espace vectoriel sur lequel agissent les formes linéaires considérées. Cette représentation résulte pour sa part du caractère unificateur, généralisateur et simplificateur des notions considérées. Or, nous l'avons vu, pour que cette approche formelle ait pu apparaître, plusieurs ruptures épistémologiques ont été nécessaires : tout d'abord la notion de fonction a dû obtenir le statut d'objet ; ensuite, il a fallu que la notion d'espace vectoriel puisse apparaître et s'imposer comme une approche unificatrice, généralisatrice et simplificatrice d'un ensemble de problèmes considérés séparément jusqu'alors.

On conçoit difficilement l'enseignement de la dualité sans l'approche que nous avons qualifiée de formelle. Or, les concepts qui y sont abordés n'ont pu être formalisés qu'à la suite de travaux en dimension infinie. On observe une réelle difficulté de présenter, en première année d'université, des situations menant à une émergence des concepts de dualité, concepts que l'on peut qualifier de notions FUGS. En effet par exemple, le dual (en algèbre linéaire) est la version simplifiée du dual topologique qui sera utilisé en analyse fonctionnelle par exemple, matière qui n'est généralement pas abordée en première année d'université ! On retrouve également des thèmes et sujets de la dualité en géométrie différentielle, mais là aussi, ce ne sont pas les notions simplifiées qui seront utilisées. Ainsi, un enseignement de la dualité en algèbre linéaire doit passer par l'approche formelle, indispensable et difficile. Une partie de notre travail porte sur la possibilité de mettre cette approche formelle à la portée des étudiants. Les éléments relevés dans ce chapitre pourront bien entendu nous y aider.

Chapitre 3. La dualité comme savoir à enseigner

Après avoir présenté, au chapitre précédent, la genèse historique des notions associées à la dualité en algèbre linéaire et avoir mis en évidence des ruptures épistémologiques, nous nous proposons maintenant d'analyser la dualité en tant que savoir à enseigner.

Introduction

Dans l'institution Université en Belgique où se déroule notre recherche, il n'y a pas de programme officiel concernant la dualité. Bien entendu, on conçoit tout à fait qu'un cours d'algèbre linéaire ait sa place dans le cursus d'un étudiant souhaitant obtenir un master en mathématiques. Et, si le contenu du cours d'algèbre linéaire est déterminé dans les grandes lignes par un collectif de professeurs, la finalisation du cours est quant à elle laissée à la liberté académique du professeur chargé d'enseigner ce domaine des mathématiques. Par conséquent, pour analyser les organisations mathématiques relatives à la dualité telles qu'elles sont susceptibles d'être rencontrées à l'Université, nous nous penchons non pas sur des programmes, mais sur des manuels et polycopiés de cours.

Nous n'avons pas la prétention de faire ici une étude exhaustive. Notre choix de manuels à analyser s'est effectué de façon à obtenir des présentations, aussi variées que possible, des notions de dualité. Ainsi, notre sélection de manuels comporte des livres anciens et des livres récents ; des livres de cours et des livres d'exercices ; des livres pour étudiants débutants et des livres pour étudiants plus avancés ; des livres anglophones et des livres francophones. Notre attention s'est ainsi portée sur onze manuels[24] dont le lecteur trouvera en Annexe 1 une brève description.

L'analyse de ces divers manuels nous a permis de dégager une vue d'ensemble des possibles en termes d'organisation relative à la dualité. Ainsi, dans un premier temps, les thèmes et sujets relatifs à la dualité ont pu être déterminés. Pour une question d'organisation, ils ont été présentés au chapitre 1, § 2. Pour rappel, voici les cinq thèmes que nous avons retenus pour la dualité : le dual (en tant qu'espace vectoriel), les formes linéaires, les bases duales, l'application transposée et les annulateurs.

Lors de l'analyse des manuels sélectionnés, nous avons pu constater qu'il n'y a pas de constante quant à *la position* de la présentation de la dualité dans un ouvrage, même pour des livres dont le contenu est comparable. Ainsi, par exemple, Halmos (1974) introduit la dualité dès la page 20 de son ouvrage, tandis qu'Escofier (2006) attendra la page 196 pour le faire. De même, nous ne pouvons dégager aucune constante de l'importance (en nombre de pages, par rapport au nombre de pages total du livre) de la part du manuel consacrée explicitement à la dualité en algèbre linéaire : cela peut varier de 3 à 23 pages selon les manuels consultés. Enfin, on constate que la dualité n'est généralement pas un secteur isolé en algèbre linéaire : d'autres parties du manuel y font généralement référence. Là encore, on relève une importante variabilité de la part des sections d'un manuel qui font référence à la dualité. Pour plus de détail sur ces sujets, nous invitons le lecteur à consulter l'Annexe 2.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous proposons, dans un premier temps (§ 1), de dégager les différentes finalités de la fonction outil de la dualité que l'on peut observer dans

[24] Ces manuels sont repris dans la partie « *Livres analysés* » de la bibliographie.

les onze manuels analysés, ainsi que d'en repérer les occurrences. Ce faisant, nous proposons un élargissement de la notion d'*outil* introduite par Douady (1986). Par la suite, nous avons choisi de sélectionner cinq manuels pour une analyse plus détaillée du secteur dualité, au niveau global, régional et local (§ 2). Enfin, nous avons répertorié, dans tous les manuels considérés, les différents types de tâches relatifs au secteur dualité (§ 3). Leur analyse terminera ce chapitre.

1. Les différentes finalités outil du secteur dualité

Nous avons souligné ci-dessus la variabilité de la présence du secteur dualité dans d'autres chapitres ou sections des manuels que celui ou celle qui lui est explicitement consacré(e) (voir Annexe 2). Ceci nous a conduit, dans un premier temps, à relever les différentes interventions de type outil (Douady 1986) de la dualité dans les manuels retenus pour notre analyse. Sur la base de ces observations, nous avons créé des catégories où les finalités outil de la dualité nous ont paru semblables. Nous avons ainsi relevé cinq *finalités* que nous présentons dans un premier temps (§ 1.1), élargissant ainsi la fonctionnalité outil introduite par Douady (1986). Nous nous posons ensuite la question de savoir quelles sont les finalités les plus fréquemment utilisées dans les différents manuels considérés (§ 1.2).

1.1. Les différentes finalités répertoriées

Nous avons présenté au chapitre 1, § 1.3, la notion de fonctionnalité outil d'un concept mathématique (Douady 1986), élément d'une perspective épistémologique sur la genèse d'un savoir mathématique. Il s'agit dans ce contexte de souligner qu'un certain savoir mathématique peut servir à résoudre des problèmes, avant même d'être considéré pour lui-même. Nous allons adopter ici une perspective plus large en faisant évoluer la notion de *fonctionnalité outil* introduite par Douady vers une notion de *finalité outil* dépendant d'un objectif poursuivi par un enseignant ou un auteur de manuel. Sur base de l'analyse d'une sélection de manuels traitant de dualité (voir § 2), nous avons répertorié cinq finalités outil pour ce secteur. Nous les présentons ci-après et les positionnons ensuite par rapport au concept introduit par Douady.

Outil-analogie

Nous avons choisi de nommer une des catégories dégagée de nos observations au moyen des termes *outil-analogie*. La finalité outil-analogie d'un secteur (ou plus particulièrement d'un thème ou d'un sujet) apparaît généralement lors de l'introduction d'un nouveau concept relevant le plus souvent d'un autre secteur mais pouvant être du même domaine. La finalité outil n'est pas ici d'intervenir dans la définition du nouveau concept, mais uniquement de permettre à quiconque connaît le secteur outil-analogie de pouvoir appréhender le nouveau concept par analogie.

Ainsi, par exemple, celui qui connaît, dans le secteur dualité, la relation introduisant la transposée au moyen du crochet de dualité[25] ($[f(x), y] = [x, f^{t}(y)]$) pourra éventuellement, par analogie, appréhender plus facilement, dans les espaces euclidiens, le concept de l'application adjointe f^* par l'intermédiaire des crochets du produit scalaire :

$$[f(x), y] = [x, f^{t}(y)] \quad \overset{\text{analogie}}{\leftrightarrow} \quad < f(x), y > = < x, f^{*}(y) >$$

[25] Rappelons que le crochet de dualité [,] est une application bilinéaire telle que $[x, y] \overset{not.}{=} y(x), \quad \text{avec } x \in E,\ y \in E'.$

On comprend ainsi que les crochets de dualité [,] et l'application transposée $f^{\,t}$, bien que n'intervenant nullement dans la définition du produit scalaire et de l'application adjointe f^*, peuvent permettre à l'apprenant qui les connaît d'appréhender, par analogie, le concept d'application adjointe.

Un autre exemple peut être fourni par l'analogie entre la propriété de *fonctions coordonnées* d'une base duale (voir chapitre 1, section 2.3) et la propriété qui dit que si $\{b_i\}_{i=1}^n$ est une base orthonormée d'un espace métrique E, alors tout x de E peut s'écrire $x=\sum_{i=1}^{n} < x, b_i > b_i$ (où les symboles « <.,.> » représentent le produit scalaire). En effet, l'analogie vient du fait qu'avec les crochets de dualité, on a, pour tout x dans E (si $\{y_i\}_{i=1}^n$ est la base duale de $\{b_i\}_{i=1}^n$) :

- $[x, y_j]$ est la $j^{ème}$ coordonnée de x dans la base $\{b_i\}_{i=1}^n$
- $< x, b_j >$ est la $j^{ème}$ coordonnée de x dans la base $\{b_i\}_{i=1}^n$.
- Bien que les objets b_j et y_j soient de nature différente (l'un est un élément de E, l'autre du dual E'), et que les symboles « [.,.] » et « <.,.> » n'aient pas la même interprétation, la personne qui aura compris que $[x, y_j]$ fournit la $j^{ème}$ coordonnée de x dans la base $\{b_i\}_{i=1}^n$ n'aura pas de mal à accepter, par analogie dans un premier temps, que $[x, y_j]$ soit la $j^{ème}$ coordonnée de x dans la base $\{b_i\}_{i=1}^n$.

Enfin, citons un exemple de la finalité outil-analogie de la dualité ne faisant pas intervenir le produit scalaire. Si on considère E, un espace vectoriel construit sur le champ K, on définit une forme bilinéaire sur E comme étant une fonction $\varphi : E \times E \to K$ vérifiant les propriétés de double linéarité :

$$\begin{aligned}\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y, z \in E : \varphi(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha\varphi(x, z) + \beta\varphi(y, z)\\ \varphi(x, \alpha y + \beta z) &= \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x, z)\end{aligned}$$

La forme bilinéaire φ est dite symétrique si $\forall x, y \in E : \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Pour aider à appréhender le concept de forme bilinéaire symétrique, on peut proposer, à quelqu'un connaissant les applications linéaires et la dualité, l'analogie suivante :

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. On peut alors définir une application linéaire $\psi : E \to E'$ telle que $\forall x \in E$, $\psi(x)$ est la forme linéaire définie par :

$$\begin{array}{lll}\psi(x) : & E \to & K\\ & y & \big(\psi(x)\big)(y) = \varphi(x, y).\end{array}$$

Outil-résolution

Nous disons que la finalité *outil-résolution* d'un secteur, d'un thème ou d'un sujet, intervient lorsque ce secteur (ou thème ou sujet) est mis en œuvre dans la résolution d'un exercice dont le sujet principal porte, a priori, sur un autre secteur (thème ou sujet) que le secteur (thème ou sujet) « outil-résolution » dont il est question. On peut supposer que l'énoncé d'un exercice sollicitant la dualité comme outil-résolution n'indique pas qu'il s'agit de mobiliser cet outil, mais cette supposition peut ne pas être vérifiée[26]. Cette finalité implique donc le caractère *disponible* (Robert 1998) du secteur « outil-résolution ».

Ainsi, un exercice sollicitant une finalité outil-résolution du secteur dualité devrait se trouver dans une autre section (ou chapitre) du manuel que celle consacrée à la dualité.

Par exemple la tâche proposée lorsqu'on demande de trouver les coordonnées de p vecteurs donnés dans une base déterminée, relève d'un type de tâches que l'on pourrait classifier comme appartenant au secteur « espace vectoriel » de l'algèbre linéaire. Cependant, une technique qui peut être associée à cette tâche est le calcul préalable de la base duale de la base donnée, et l'application des vecteurs de cette base duale aux vecteurs pour lesquels il est demandé de calculer les coordonnées[27]. Bien que faisant partie du même domaine (algèbre linéaire) que celui dont relève la tâche proposée, les bases duales ne font pas directement partie du secteur « espace vectoriel », et sont davantage reliées au secteur « dualité ». Leur intervention dans la praxéologie associée à la tâche proposée ci-dessus relève d'une finalité que nous avons qualifiée d'outil-résolution.

Dans la même lignée, cette finalité outil-résolution peut également être sollicitée lorsque, pour montrer qu'un ensemble de vecteurs $M = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ est générateur d'un espace vectoriel E (c'est-à-dire $Span\{x_1, ..., x_n\} = E$), on montre que l'annulateur de M est réduit à la forme linéaire nulle : $M^\circ = \{0\}$ (ce qui se ramène en pratique à démontrer qu'une forme linéaire qui s'annule sur tous les vecteurs de M est obligatoirement la forme linéaire nulle).

Outil-illustration

Nous disons que la finalité *outil-illustration* d'un secteur, un thème ou un sujet, est invoquée lorsque le secteur en question sert de cadre à un exercice permettant d'illustrer un sujet ou un thème non relié, a priori, au secteur outil-illustration.

Ainsi, par exemple, pour illustrer les espaces quotients, Halmos (1974, p.35) utilise, entre autre, le dual d'un espace quotient et des annulateurs. Explicitons quelque peu le contexte évoqué :

Partant de M, un sous-espace d'un espace vectoriel E, et de x, un vecteur arbitraire de E, Halmos définit un *co-ensemble* de M comme étant $\{x + y : y \in M\}$, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les sommes ($x + y$) où y est dans M. Il note $x + M$ un co-ensemble de M. Il illustre cette notion en identifiant E à $\mathbb{R}^2$ (*the real coordinate plane*) et M à l'ensemble des couples de réels dont la seconde composante est nulle (*the horizontal axis*). Les co-ensembles de M sont alors les droites horizontales. Il montre ensuite qu'on peut munir l'ensemble des co-ensembles de M d'une structure d'espace vectoriel. C'est cet espace vectoriel qu'il appelle espace quotient de E, modulo M, et qu'il dénote E/M.

Afin d'illustrer la notion d'espace quotient fraîchement introduite, Halmos propose, entre autres, l'exercice suivant :

> Supposons que M soit un sous-espace d'un espace vectoriel E. A chaque forme linéaire y sur E/M (i.e. à chaque élément y de $(E/M)'$), correspond une forme linéaire z sur E (i.e. un élément de E') ; la forme linéaire z est définie par $z(x) = y(x + M)$. Prouvez que la correspondance $y \to z$ est un isomorphisme entre $(E/M)'$ et M°. (Halmos 1974, p. 35).

[26] Pour un exemple d'énoncé d'un tel exercice, se référer à la question 1.d. du questionnaire « débutants » sur la dualité (voir chapitre 4, § 2.1).
[27] Voir chapitre 1, § 2.3.

On voit bien à travers cet exercice que le dual est utilisé afin d'illustrer, « d'exercer » la notion d'espace quotient.

Un autre exemple peut être fourni par les formes bilinéaires. On peut élargir la définition d'une forme bilinéaire définie sur un espace vectoriel E (donnée à la sous-section « Outil-analogie » ci-avant) à la définition d'une forme bilinéaire sur $E \times F$, E et F étant deux espaces vectoriels définis sur un même champ K. Halmos (1974, p.36) en propose alors l'illustration suivante : si on prend pour F le dual de E, on illustre le concept de forme bilinéaire à l'aide du crochet de dualité, déjà introduit :

$$\begin{array}{llll} [.,.]: & E \times E' \to & K \\ & (x, y) & [x, y] \overset{not.}{=} y(x) \end{array}$$

Remarquons que nous avons présenté une finalité outil-analogie et une finalité outil-illustration du secteur dualité pour un même concept (les formes bilinéaires). En effet, dans la sous-section intitulée « Outil-analogie », la dualité est utilisée pour faire comprendre le résultat de l'application d'une forme bilinéaire sur un élément de $E \times E$. Et ici, la dualité est utilisée pour donner un exemple de forme bilinéaire, en particularisant l'espace de départ $E \times F$ à $E \times E'$.

Outil-définition

Nous disons que la finalité *outil-définition* d'un secteur, un thème ou un sujet, est mise en œuvre lorsque le secteur en question intervient dans la définition de nouveaux concepts, non trivialement reliés au secteur considéré.

Telle est ainsi, par exemple, la finalité de l'utilisation du secteur dualité dans la définition du produit tensoriel $U \otimes V$ de deux espaces vectoriels de dimension finie U et V (définis sur le même champ). En effet, le produit tensoriel $U \otimes V$ peut être défini comme étant le dual de l'espace vectoriel de toutes les formes bilinéaires définies sur $U \oplus V$ (voir chapitre 1, § 2.1).

Un autre exemple de la finalité outil-définition de la dualité peut être fourni par les formes multilinéaires. En effet, une forme multilinéaire (ou k-linéaire) est une forme linéaire sur chacune de ses k-variables.

Citons encore les bases conjuguées dans lesquelles la base duale intervient comme outil-définition. En effet, étant donnée une base $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ d'un espace vectoriel E, et sa base duale $\{y_i\}_{i=1}^{n}$, si on munit E d'un produit scalaire noté « < , > », on peut alors définir $\{c_i\}_{i=1}^{n}$, la base conjuguée de $\{b_i\}_{i=1}^{n}$, comme étant les vecteurs de l'espace métrique E tels que $< b_i, c_j > \; = [b_i, y_j] = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, qui vaut un si $i = j$ et qui vaut zéro si $i \neq j$. Autrement dit, par rapport à une base $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ de E, les vecteurs de la base conjuguée $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ sont les représentants (par le théorème de Riesz) des « vecteurs » (formes linéaires) de la base duale $\{y_i\}_{i=1}^{n}$.

Outil-démonstration

Nous disons que la finalité *outil-démonstration* d'un secteur, d'un thème ou d'un sujet, intervient lorsque le secteur en question est utilisé dans le corps d'une démonstration afin de prouver une propriété qui ne fait pas explicitement référence à la dualité dans son énoncé.

Nous distinguons cette finalité de la finalité outil-résolution présentée ci-avant étant donné le caractère théorique spécifique qui prévaut ici.

A titre d'exemple, examinons la démonstration du théorème suivant, où, soit dit en passant, l'auteur utilise les termes « transformation duale » en lieu et place de « transformation transposée » :

> Si A est une transformation linéaire quelconque d'un espace vectoriel E de dimension n, alors il existe n+1 sous-espaces M_0, M_1,…, M_{n-1}, M_n avec les propriétés suivantes :
>
> (i) Chaque Mj (j = 0, 1,…, n-1, n) est invariant[28] sous A,
>
> (ii) La dimension de Mj est j,
>
> (iii) $(\emptyset =) M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n (= E)$.
>
> Preuve :
>
> Si $n = 0$ ou $n = 1$, le résultat est trivial. Nous procéderons par récurrence, en supposant que la proposition est vraie pour n-1. Considérons la transformation duale A' sur E' ; puisqu'elle a au moins un vecteur propre, disons x', il existe un sous-espace M de dimension 1 invariant sous A' : l'ensemble de tous les multiples de x'. Appelons M_{n-1} l'annulateur (dans $E'' = E$) de M (i.e. $M_{n-1} = M°$). Dès lors, M_{n-1} est un sous-espace de E de dimension (n-1), et M_{n-1} est invariant sous A. Par conséquent, on peut considérer A comme une transformation linéaire sur M_{n-1} , et on peut trouver M_0, M_1,…, M_{n-2}, M_{n-1} satisfaisant les conditions (i), (ii), (iii). Pour conclure, il suffit alors de poser $M_n = E$. (Halmos 1974, p. 106).

On peut en effet constater que la dualité est utilisée dans la démonstration de ce théorème qui ne relève quant à lui pas a priori du secteur de la dualité.

Un autre exemple est fourni par Uhlig :

> Soient $U = Span\{u_1,...,u_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n, a \notin U$; alors, il existe un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $b \perp U$. De plus, $0 \neq b \notin U$.
>
> Preuve :
>
> Puisque $a \notin Span\{u_i\} = U$, le système linéaire $\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_k \\ | & & | \end{pmatrix} x = a$ n'a pas de solution. Donc, par le théorème 3.1, nous avons que rang (U) < rang (U | a) pour la matrice $U = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_k \\ | & & | \end{pmatrix}_{nk}$. Par conséquent, rang (U) < n, où n est le nombre de lignes de U. D'où, dans chaque forme échélonnée par ligne de U, il y a une ligne sans pivot. Regardons $U^T = \begin{pmatrix} — & u_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & u_k^T & — \end{pmatrix}$. U^T a le même rang que U par le théorème 7.2. Donc, chaque forme échelonnée par ligne R_{kn} de U^T a aussi moins de n pivots, de sorte que chaque matrice R ainsi obtenue au moins une colonne libre. En d'autres mots, $Ker(U^T) \neq \{0\}$. Prenons n'importe

[28] Un sous-espace vectoriel M est invariant sous une transformation linéaire f si $\left(x \in M\right) \Rightarrow \left(f(x) \in M\right)$.

quel vecteur non nul $b \in Ker(U^T)$. Donc $b \perp U = Span\{u_i\}$ comme expliqué au chapitre 4, et $b \notin U$ car sinon $b.b = \sum_i b_i^2 = 0$. (Uhlig 2002, p. 217).

Si nous nous rappelons qu'Uhlig ne traite pas explicitement l'objet dualité dans son ouvrage, on peut considérer que la démonstration présentée ci-dessus met bien en œuvre la finalité outil-démonstration de la dualité.

Synthèse

Remarquons que l'ordre dans lequel ont été présentées les différentes finalités *outil* de la dualité est arbitraire, et ne présume en rien d'une éventuelle importance de l'une ou l'autre de ces finalités. Cependant, les différentes finalités outil de la dualité ne sont pas toutes de même nature : certaines interviennent davantage dans un bloc technologico-théorique d'une praxéologie (Chevallard 2007) (outil-démonstration, outil-définition), d'autres dans un bloc practico-technique d'une praxéologie (outil-résolution), alors que d'autres n'ont pas de bloc de prédilection (outil-analogie, outil-illustration).

On peut tout de même mentionner le fait que si la dualité est utilisée dans un manuel comme illustration d'une notion, c'est que l'auteur considère la dualité comme une notion *naturelle* (allant de soi) qui peut à son tour servir d'illustration à d'autres notions. Il en va de même lorsque la finalité outil-résolution est présente dans un manuel.

Remarquons que la fonctionnalité outil introduite par Douady (1986) établie dans une perspective épistémologique est à rapprocher de ce que nous avons appelé la finalité outil-résolution d'une notion mathématique. Rappelons que les différentes finalités outil que nous venons d'introduire sont quant à elles assignées à la notion par un enseignant ou un auteur de manuel.

Les différentes finalités outil de la dualité que nous avons mises en évidence lors de l'analyse de manuels et que nous avons présentées ici nous seront utiles lors d'analyses ultérieures, notamment lors de l'élaboration de questionnaires[29] à destination d'étudiants confrontés à l'enseignement de la dualité.

1.2. Présence des différentes finalités répertoriées dans les manuels retenus

Après avoir défini cinq finalités pour la finalité outil du secteur dualité, nous présentons maintenant le nombre de manuels présentant les différentes finalités répertoriées (Tableau 3-1).

	Finalités *outil* de la dualité :				
	Outil-analogie	Outil-résolution	Outil-illustration	Outil-définition	Outil-démonstration
Nombre de manuels (sur les 11 manuels analysés) faisant intervenir la finalité…	7	6	3	5	6

Tableau 3-1. Nombre de manuels analysés faisant intervenir les différentes finalités *outil* de la dualité

Remarquons que, vue la spécificité de certains manuels analysés, il est normal que toutes les finalités outil répertoriées pour la dualité ne puissent pas être présentes dans tous les manuels. Ainsi, par exemple, en est-il de l'ouvrage d'Etienne. En effet, ce manuel se veut

[29] Voir chapitre 4.

essentiellement un recueil d'exercices. Il ne comporte que quelques rappels théoriques. Ainsi, aucune démonstration n'est évidemment présente dans cet ouvrage. Il est donc normal de ne pas y retrouver la finalité *outil-démonstration*. On peut avoir un point de vue analogue concernant l'ouvrage d'Uhlig : la dualité n'y est pas présentée sous l'aspect *objet* (Douady 1986). Il est donc normal que la finalité *outil-analogie* n'y soit pas présente.

Une première constatation que l'on peut faire au regard du Tableau 3-1, c'est que les différentes finalités outil de la dualité ne sont pas présentes en nombre dans les différents manuels analysés. On constate que la finalité la plus usitée est la finalité outil-analogie, suivie de près par les finalités outil-résolution et outil-démonstration. La dualité intervient peu pour illustrer d'autres notions.

Mentionnons enfin que tous les manuels analysés, à l'exception de l'ouvrage de Lang, présentent au moins une finalité outil de la dualité ; et que seul l'ouvrage d'Halmos présente toutes les finalités répertoriées. Cette dernière constatation peut s'interpréter par le fait qu'Halmos semble considérer la dualité comme une notion *naturelle*, qui va de soi, qui ne présente pas une difficulté particulière par rapport à d'autres secteurs de l'algèbre linéaire. De manière générale, l'absence ou la présence des différentes finalités de l'outil dualité dans un manuel va nous aider à caractériser les choix de transposition des auteurs.

2. Analyse d'une sélection de manuels

Après avoir analysé les différentes finalités outil de la dualité, dans les onze manuels sélectionnés, nous allons maintenant porter notre attention sur cinq de ces manuels afin de les analyser plus finement. Dans un premier temps (§ 2.1) nous justifions les choix effectués, puis nous analysons chacun des cinq manuels tout d'abord d'un point de vue global/régional (§ 2.2), puis régional/local (§ 2.3) et enfin local (§ 2.4).

2.1. Les choix opérés

Les cinq manuels retenus pour une analyse plus fine sont les suivants :

- *Finite-Dimensional Vector Spaces* de Halmos (1974) ;
- *Toute l'algèbre de la licence* d'Escofier (2006) ;
- *Algèbre linéaire* de Pham & Dillinger (1996) ;
- *Methodix algèbre* (250 méthodes, 250 exercices corrigés) de Merlin (1995) ;
- *Transform Linear Algebra* de Uhlig (2002).

Par la suite, ces ouvrages sont désignés par le nom de leur(s) auteur(s). Le choix de ces manuels est motivé par la diversité des ouvrages ainsi sélectionnés, que nous expliquons maintenant : le rôle important qu'à joué le livre d'Halmos[30], ainsi que le fait que ce livre serve de référence au polycopié du cours d'algèbre linéaire que suivent les étudiants questionnés lors de notre recherche[31], nous ont poussée à sélectionner ce livre. Le livre d'Escofier (2006) a été choisi pour l'approche historique et généralisatrice qui est y est faite de l'algèbre linéaire. Son ouvrage a été rédigé en pensant à un parcours d'un étudiant de licence[32] ; il est donc tout à fait à propos dans notre analyse d'un savoir à enseigner. L'ouvrage de Pham & Dillinger (1996) est également repris dans notre sélection car il présente une approche différente de

[30] Voir chapitre 2, § 3.3.
[31] Voir chapitres 4 et 6.
[32] La licence correspondant aux trois premières années d'université en France.

l'algèbre linéaire (et donc de la dualité) : dans leur livre, les auteurs présentent davantage une « façon de penser » qu'une « manière de résoudre des exercices », justifiant le formalisme unificateur de l'algèbre par une unification de la pensée, qui est réalisée par la dualité (au sens où nous l'entendons dans notre recherche, mais également au sens de la dualité entre deux points de vue : la pensée par les calculs et la pensée géométrique). L'ouvrage de Merlin (1995) aborde les choses d'une toute autre façon, c'est la raison pour laquelle nous l'avons aussi repris dans notre sélection. Bien que cet ouvrage se veuille essentiellement un recueil de méthodes et d'exercices corrigés, l'auteur précise que pour être efficace, une méthode doit être utilisée à bon escient, il faut donc être capable de discerner l'opportunité de son application ou de sa non-application. Enfin, la sélection du livre d'Uhlig (2002) s'explique par le fait que, bien que la dualité ne soit pas présentée en tant qu'objet dans cet ouvrage, elle est pratiquement omniprésente tout au long des chapitres. Cette caractéristique en fait un livre tout à fait différent des autres déjà sélectionnés.

2.2. Analyse de l'organisation mathématique globale/régionale

Nous présentons maintenant l'analyse globale/régionale des cinq manuels sélectionnés. La variété de ces manuels va, en effet, nous permettre de décrire un ensemble d'organisations mathématiques possibles, et d'identifier des caractéristiques importantes sur lesquelles on pourra repérer des différences.

Le lecteur pourra consulter l'Annexe 3 reprenant d'une part les tables des matières des manuels analysés pour avoir une vue d'ensemble des occurrences du secteur dualité dans l'ensemble des manuels, et d'autre part une présentation détaillée de l'enchaînement des thèmes et sujets de la dualité pour chaque manuel analysé.

Nous concentrons ici notre propos sur des caractéristiques particulières des différents ouvrages sélectionnés.

Le livre d'Halmos

Rappelons l'importance historique de ce livre, dont la première édition a contribué, avec le livre de Birkhoff & Mac Lane, à la diffusion de l'algèbre linéaire auprès des chercheurs et dans l'enseignement universitaire au début des années 1940.

Le livre de Halmos (1974), composé de 200 pages, comporte 4 chapitres. Il ne traite que des espaces vectoriels de dimension finie. Le cas réel (champ réel) et le cas complexe (champ complexe) sont tous deux abordés dans l'ouvrage.

C'est dans le premier chapitre, intitulé "Spaces" (Espaces), qu'Halmos introduit la dualité, après avoir présenté les notions de champ, d'espace vectoriel, de dépendance linéaire, de combinaisons linéaires, de base et dimension, d'isomorphismes et de sous-espaces vectoriels.

Halmos aborde donc très vite la dualité en tant qu'<u>objet</u> dans son ouvrage (dès la page 20). Il commence par définir une "*linear functional*", que nous avions appelée ***forme linéaire*** au chapitre1, § 2.2, et il la note y. Il donne ensuite des exemples et contre-exemples en prenant des formes linéaires définies :

- sur $\mathbb{C}^n$
- sur $\mathcal{P}$ (polynômes de degré inférieur ou égal à n), notamment le cas particulier où $y(x) = \int_a^b \alpha(t)x(t)dt$, avec (a,b) un intervalle de la droite réelle, α une

fonction intégrable à valeurs complexes définie sur (a,b). On y reconnaît le lien avec les équations de Fredholm (voir chapitre 2, § 3.2).

- sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$ quelconque.

Il définit l'**espace dual** de $\mathcal{V}$ (qu'il note $\mathcal{V}'$) comme étant l'espace vectoriel dont les éléments sont les formes linéaires définies sur $\mathcal{V}$, après en avoir défini le zéro, l'addition et la multiplication par un scalaire.

Dans la section suivante ("*Brackets*"), Halmos introduit la notation du **crochet de dualité** : $[x, y] = y(x)$, qu'il présente ensuite comme une "*bilinear functional*" (forme bilinéaire). Viennent ensuite des exercices, concernant pratiquement les mêmes espaces que ceux décrits pour les exemples.

Est ensuite introduite la **base duale** $\mathcal{X}' = \{y_1, ..., y_n\}$ d'une base $\mathcal{X} = \{x_1, ..., x_n\}$ de $\mathcal{V}$. Quoi qu'il le démontre via la base duale, Halmos ne mentionne pas explicitement l'existence d'un isomorphisme entre un espace et son dual. De même, le fait que le $i^{ième}$ vecteur de la base duale $\mathcal{X}'$ appliqué à un vecteur quelconque de $\mathcal{V}$ fournisse la $i^{ième}$ coordonnée de ce vecteur dans la base $\mathcal{X}$ apparaît dans une démonstration, mais n'est pas mentionné comme un résultat en soi. Aucun exemple de base duale n'est donné.

Halmos introduit ensuite le **bidual** d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$, qu'il note $\mathcal{V}''$. Le crochet de dualité lui permet d'exprimer un élément du bidual, qu'il notera alors $[x_0, y]$ (avec x_0 fixé)[33] ou z. Halmos énonce et démontre le théorème de **réflexivité** concernant la « *natural correspondance* » (isomorphisme naturel), et explique ces termes. Il précise qu'en <u>dimension finie</u>, on peut identifier $\mathcal{V}$ à $\mathcal{V}''$ et il se permet aussi l'identification de la base du primal avec la base duale de la base duale : $\mathcal{X}'' = \mathcal{X}$. Le cadre générique (espace vectoriel $\mathcal{V}$ non particularisé) est le seul utilisé.

Les **annulateurs** sont ensuite introduits, sous les termes d'« Annihilators », et la notation $\mathcal{S}^0$ est utilisée pour l'annulateur d'un ensemble $\mathcal{S}$ de vecteurs de $\mathcal{V}$. Des propriétés de ces derniers sont alors énoncées et démontrées toujours dans le cadre d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ non particularisé. Des exercices clôturent la section. Il n'y a pas de référence à la géométrie.

Un peu plus loin, Halmos présente aussi le **dual d'une somme directe** de sous-espaces vectoriels (« *Dual of a direct sum* »). La dualité y est toujours présentée sous forme d'objet, en rapport avec un espace vectoriel $\mathcal{V}$ non particularisé.

La dualité intervient ensuite comme <u>outil-illustration</u> dans des exercices concernant les espaces-quotients (Halmos 1974, p.35) à travers les thèmes du dual et des annulateurs ; et dans la section sur les formes bilinéaires (Halmos 1974, p.36), à travers le thème du dual.

La dualité intervient aussi, à travers le thème du dual, comme <u>outil-définition</u> pour le produit tensoriel $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ de deux espaces $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de dimension finie définis sur le même champ[34].

C'est dans le deuxième chapitre de son livre, intitulé "Transformations", qu'Halmos définit les *transformations* linéaires, qu'il note généralement *A*, et les matrices associées, notées [*A*]. Plus loin (Halmos 1974, p.78), il définira la **transposée d'une transformation**

[33] Remarquons qu'avec cette notation, Halmos ne fait pas la distinction entre un élément du bidual (qu'il conviendrait de noter $[x_0, .]$) et l'évaluation de cet élément sur une forme linéaire *y* quelconque .

[34] Voir chapitre 1, § 2.1.

linéaire par l'intermédiaire du crochet de dualité. Il la note *A'* et l'appelle « *the* adjoint *(or dual) of A* ». La dualité en tant qu'objet est alors complétée par l'énoncé et la démonstration des propriétés de la transposée. Une particularisation aux projections est proposée (Halmos 1974; p.80), sans que l'on puisse toutefois parler de cadre géométrique, les espaces vectoriels considérés étant toujours génériques, et donc non particularisés. De plus, aucun schéma ou graphique n'est présenté pour illustrer les notions introduites. La **matrice de la transposée** d'une transformation linéaire est également présentée : « *this matrix [A'] is called the transpose of [A]* » (Halmos 1974, p.81). Remarquons que, si l'auteur utilise le terme *adjoint* ou *dual* pour nommer la transformation transposée, c'est bien le terme *transpose* qu'il utilise pour désigner la matrice associée à la transformation transposée. On se rappelle que, historiquement, la matrice transposée a été définie bien avant que n'apparaisse le concept de transformation transposée (voir chapitre 2).

Dans la section consacrée aux changements de base, Halmos utilise la dualité comme <u>analogie</u> pour l'interprétation du produit matriciel ; ce qui lui permet d'introduire la notion de vecteurs covariants et contravariants.

La dualité est encore présente en tant qu'objet dans la section intitulée "*Range and null-space*" (*image et noyau*) (Halmos 1974, p.90). Le théorème fondamental de l'algèbre linéaire y est, entre autres, énoncé et démontré (Halmos ne donne pas de nom au théorème). Dans une section suivante, Halmos présente dans un même énoncé le théorème dit "du rang"[35] et le fait que le rang d'une application est égal au rang de sa transposée.

La dualité, à travers les bases duales, intervient comme <u>outil-démonstration</u> dans un théorème concernant les transformations de rang un (Halmos 1974, p.92).

On se rend donc déjà compte à ce stade qu'Halmos alterne très habilement les passages où il présente la dualité en tant qu'objet avec les passages où la dualité est considérée comme un outil, avec des finalités variées.

Dans le chapitre 3, intitulé « orthogonality » (orthogonalité), Halmos complète l'objet dualité en définissant une correspondance *naturelle* entre $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$: il énonce et démontre **théorème de représentation de Riesz** (sans toutefois lui donner ce nom), faisant ainsi le lien entre les formes linéaires et le produit scalaire. Grâce à ce théorème, Halmos définit aussi un **produit scalaire sur $\mathcal{V}'$** [36], à partir du produit scalaire sur $\mathcal{V}$. Le dual d'un espace vectoriel (réel ou complexe) $\mathcal{V}$, muni du produit scalaire ainsi défini est noté $\mathcal{V}^*$. Il y a donc un isomorphisme conjugué naturel entre $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}^*$. Halmos présente ensuite l'<u>analogie</u> entre les crochets de dualité [.,.] et la notation utilisée pour le produit scalaire (.,.). De même, avec l'introduction du produit scalaire, l'annulateur $M°$ (sous-espace de $\mathcal{V}'$ ou $\mathcal{V}^*$) est remplacé par l'orthogonal $M^\perp$ (sous-espace de $\mathcal{V}$) ; la base duale d'une base $\mathcal{X} = \{x_1,\ldots,x_n\}$de $\mathcal{V}$ est remplacée par une base $\mathcal{Y} = \{y_1,\ldots,y_n\}$de $\mathcal{V}$ telle que $(x_i,y_j) = \delta_{ij}$ (base conjuguée). Halmos définit ensuite la transformation linéaire A^* par <u>analogie</u> avec la transformation transposée A' qu'il avait définie dans le chapitre 2. Rappelons qu'Halmos appelait déjà A' la transformation *adjointe* de A (et non pas *transposée*). Il ne donne pas de nom particulier à A^*.

Le chapitre 4 est dédié à l'analyse, cadre privilégié d'application pour les notions d'algèbre linéaire.

[35] Le théorème du rang énonce le fait que, pour une application linéaire, la dimension de son image plus la dimension de son noyau est égale à la dimension de l'espace de départ de l'application.

[36] Soient $y_1', y_2' \in \mathcal{V}'$. Par le théorème de Riesz, il leur correspond les vecteurs y_1 et y_2 dans $\mathcal{V}$. Halmos définit alors le produit scalaire (y_1', y_2') comme étant égal à $\overline{(y_1, y_2)} = (y_2, y_1)$.

En conclusion de cette analyse, nous pouvons dire qu'Halmos introduit rapidement la dualité dans son ouvrage. Il alterne régulièrement les moments où il présente la dualité comme un objet et les moments où il utilise les thèmes de la dualité déjà introduits, que ce soit pour définir, introduire ou illustrer une nouvelle notion ou pour démontrer une propriété. Sans oublier les analogies qu'il fait à partir de la dualité. Pour Halmos, la dualité est tout aussi naturellement utilisée que le serait une notion élémentaire d'algèbre linéaire, telle une base ou une application linéaire. Aux interprétations géométriques (pratiquement absentes de son ouvrage), Halmos préfère les applications en analyse : même si le cadre d'un exercice est l'espace des polynômes, Halmos proposera comme exemple de forme linéaire définie sur cet espace une intégrale définie ou l'évaluation d'une dérivée en un point particulier par exemple.

Le livre d'Escofier

Le livre d'Escofier (674 pages) comporte trois parties, pouvant correspondre respectivement aux trois premières années d'université du parcours d'un étudiant en mathématiques en France.

La première partie, correspondant donc à la première année, présente l'algèbre linéaire, ainsi que l'algèbre de base. Elle comporte 10 chapitres dont le dernier est consacré à la dualité.

Après un avant propos dans lequel il explique l'approche historique et généralisatrice de son livre, l'auteur consacre quatre chapitres à la présentation de ce qui pourrait lui servir de cadre par la suite : les *équations différentielles linéaires*, les *suites récurrentes linéaires, l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$ et les *systèmes linéaires*. Viennent ensuite des chapitres sur les *généralités sur les espaces vectoriels*, les *bases et dimension*, les *applications linéaires* et les *matrices*. Le lien entre matrice et application linéaire est fait d'emblée à l'entrée de ce huitième chapitre, mais si on y parle de matrice de la composée ou de matrice inverse, il n'est cependant pas fait mention de matrice transposée. Il faudra attendre la fin du chapitre 9, consacré aux *sommes directes, produits et quotients* pour qu'Escofier définisse, par l'intermédiaire de l'énoncé d'un exercice, la transposée d'une matrice $M = (a_{ij})$ comme étant la matrice ${}^tM = (a_{ji})$.

A ce stade donc, la dualité n'a pas encore été vraiment abordée ; seules les notions de matrice transposée et d'hyperplan ont été introduites.

Le chapitre 9 se termine par la remarque suivante :

> **Vers le chapitre 10**
>
> Le chapitre 9 termine ce qu'il semble raisonnable d'enseigner en première année de Licence au sujet de l'algèbre linéaire actuellement. Le chapitre 10 est un peu à part. Il présente des notions sur l'espace vectoriel formé par les hyperplans d'un espace vectoriel, appelé espace dual. Certains et certaines pourront le trouver un peu difficile, un peu abstrait; si sa seule lecture peut-être différée jusqu'au chapitre 16, il semble plus à sa place ici. (Escofier 2006, p. 175).

Voici le lecteur prévenu!

Le chapitre 10, consacré à la "*Dualité*" ne comporte que 13 pages, incluant des énoncés et solutions d'exercices. Après une introduction à caractère historique, l'auteur définit l'**espace** vectoriel **dual** de E en dimension finie. Il le note E^*, et définit dans la foulée le **bidual**, E^{**}.

La section 10.2 s'intitule "***Formes linéaires** et **hyperplans***". Une proposition reprend les liens entre ces deux notions. Le caractère géométrique est donc très présent. La section 10.3 est dédiée à la notion de "***Base duale***". Escofier y donne, sans vraiment le dire, l'expression générale d'une forme linéaire. L'auteur explique aussi à la fin de cette section, que les coordonnées des formes linéaires dans la base duale permettent de travailler avec des formes linéaires en lieu et place des équations. On entrevoit déjà l'outil-résolution que peut fournir la dualité, bien que celui-ci ne soit pas développé.

Dans la section 10.4 ("*Orthogonal d'un sous-espace*"), l'auteur définit l'orthogonalité de formes linéaires et de vecteurs : une forme linéaire *f* de *E** et un vecteur *u* de *E* sont orthogonaux si *f*(*u*) = 0. Le terme *orthogonal* est expliqué par le fait que les coordonnées de *u* et *f* définissent dans $\mathbb{R}^n$ des vecteurs orthogonaux pour le produit scalaire usuel (l'auteur renvoie au chapitre 16 pour ces notions). Le terme *annulateur* n'est pas utilisé, Escofier lui préfère le terme **orthogonal d'un sous-espace** *F* de *E*. Il le note $F^{\perp}$. L'auteur explicite ensuite les liens entre forme linéaire de $F^{\perp}$, noyau et hyperplan. Un exemple est donné avec interprétation géométrique ($\mathbb{R}^3$). Escofier définit ensuite l'orthogonal d'un sous-espace *G* de *E** :

$$G^{\perp} = \{u \in E \mid \forall f \in G : f(u) = 0\}.$$

L'interprétation de cette définition est ensuite également faite en termes d'hyperplans. Le caractère géométrique est omniprésent, que ce soit dans les interprétations, dans les notations ($\perp$) ou dans les dénominations (orthogonal et non annulateur).

Les propriétés qui suivent (dimension et orthogonal d'orthogonal) sont chaque fois énoncées pour les deux types d'orthogonal (d'un sous-espace de *E* ou de *E**). Evidemment, avec les définitions introduites, on a les propriétés suivantes : si *F* est un sous-espace de *E* et *G* un sous-espace de *E** : $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$ et $\left(G^{\perp}\right)^{\perp} = G$. Les notions sont illustrées par un exemple où $E = \mathbb{R}^3$, et le vocabulaire utilisé est clairement géométrique.

La section 10.5 s'intitule "*Transposée d'une application linéaire*". Après une définition formelle dans le registre générique de l'algèbre linéaire, c'est le registre graphique qui est utilisé pour "*visualiser*" la définition. L'auteur énonce et démontre dans le registre générique algébrique la linéarité de la **transposée d'une application linéaire** *g*, notée ${}^{t}g$. Il utilise par contre ensuite le registre graphique pour expliquer la transposée d'une composition de formes linéaires. La **transposée d'une matrice** est ensuite définie comme elle l'avait été dans un énoncé d'exercice situé la fin du chapitre 9. Une proposition fait ensuite le lien entre la transposée de l'application et la transposition de la matrice de l'application, le tout présenté dans le registre générique algébrique.

Suivent ensuite des énoncés d'exercices variés, tant au niveau du statut des énoncés que des cadres dans lesquels ils sont formulés.

Après la présentation de la dualité faite au chapitre 10, il faut attendre le chapitre 16 consacré à l'orthogonalité pour que ce secteur soit à nouveau mentionné. On se situe alors, d'après la classification de l'auteur, dans la deuxième année d'enseignement. La transposition d'une matrice est utilisée dans l'expression du produit scalaire ; nous n'y voyons cependant pas de référence explicite à la dualité étant donné qu'il s'agit plutôt ici d'une notation. Plus loin dans ce chapitre, l'articulation entre les formes linéaires et le produit scalaire est faite à partir des formes bilinéaires :

> Soit *E* un espace euclidien et soit *u* un vecteur non nul de *E*. Notons $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ le produit scalaire. Pour tout *u* de *E*, l'application $\varphi_u : v \mapsto \varphi(u, v)$ est une application linéaire de *E* dans $\mathbb{R}$. C'est donc une forme linéaire sur *E*, autrement dit un élément de ce que nous avons appelé au

> chapitre 10 l'espace dual de E et que nous avons noté E^*. (Escofier 2006, p. 341).

On y reconnaît ce que nous avons présenté sous le nom de **théorème de Riesz** dans le chapitre 1, § 2.2.

Le lien avec les hyperplans est ensuite fait en affirmant que l'orthogonal d'un vecteur u non nul de E est l'hyperplan $\ker(\varphi_u)$. L'isomorphisme entre E et E^* est alors précisé : $\varphi_g : E \to E^*$ tel que $u \mapsto \varphi_u$. La matrice associée à φ_g est aussi précisée.

Remarquons que la dualité est considérée dans cette section comme <u>un objet</u>, et non comme un outil.

A la section 16.12 intitulée "*Endomorphisme adjoint et autoadjoint*", la matrice transposée est citée comme étant la matrice associée à l'endomorphisme adjoint (noté f^*) d'un endomorphisme f défini sur un espace euclidien E, par rapport à une base orthonormée de E. Aucune référence n'est faite explicitement à la dualité.

Dans la section consacrée à la troisième année, le chapitre 22 est consacré aux "*Formes bilinéaires symétriques et quadratiques*". Des thèmes et sujets de la dualité comme les hyperplans et les orthogonaux de sous-espaces sont cités, mais comme on travaille dans un espace euclidien, ce sont les notions liées au produit scalaire qui sont utilisées, et non les notions de la dualité dont elles sont dérivées. Dans la deuxième section de ce chapitre, Escofier se sert de la dualité (espace vectoriel dual, forme linéaire et base duale) comme <u>outil-analogie</u> pour les formes bilinéaires symétriques (voir §1.1, "Outil-analogie"). Il continue également de présenter dans cette section la dualité sous forme d'objet (à travers les matrices associées aux formes bilinéaires symétriques, via les bases duales). Plus loin dans ce même chapitre, on pourrait qualifier d'<u>outil-analogie</u> l'utilisation qui est faite de la dualité : elle permet, à travers les formes bilinéaires symétriques, de faire le lien entre l'orthogonal (au sens de la dualité) d'un sous-espace de E^* et l'orthogonal (au sens du produit scalaire) d'un sous-espace de E. A la fin de ce chapitre, l'espace vectoriel dual et l'orthogonal d'un sous-espace interviennent encore en tant qu'objet à travers l'application $\psi : E \to E^*$ associée à une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to E$.

En conclusion, nous pouvons dire que dans l'ouvrage d'Escofier, la dualité est principalement présentée sous un aspect géométrique. Pour preuve, on prendra par exemple la définition et la notation de l'orthogonal (annulateur) d'un sous-espace d'un espace vectoriel : $F^\perp$, qui est ici défini à la fois pour un sous-espace de E et pour un sous-espace de son dual, noté E^*. La dualité est présente dans l'ensemble de l'ouvrage, à la fois sous le statut d'objet, et sous le statut d'outil, à finalité d'analogie, principalement dans le cadre des formes bilinéaires. Ceci n'est pas sans rappeler le produit scalaire, lié à un point de vue géométrique très clairement privilégié !

Le livre de Pham & Dillinger

Ce livre (347 pages) comporte un prologue, quatre chapitres, un épilogue et trois annexes. De manière générale, les auteurs relèguent dans les annexes les parties qu'ils jugent trop techniques, comme la définition formelle des structures algébriques par exemple. Ainsi, c'est dans la troisième annexe que se trouvera présentée l'approche formelle de la dualité.

Dans le prologue, les auteurs présentent déjà l'activité mathématique selon un double point de vue (calcul et géométrie), en considérant des systèmes d'équations linéaires. Cette double vision est une préoccupation des auteurs tout au long de leur ouvrage.

Le premier chapitre est consacré à l'étude formelle des systèmes linéaires. C'est dans ce cadre que des premières notions d'algèbre linéaire sont introduites (indépendance linéaire et rang[37]). Les auteurs indiquent ainsi clairement leur cadre de préférence : les systèmes linéaires. C'est d'ailleurs dans ce cadre que les auteurs introduisent, sans donner de définition formelle, une *forme linéaire à n indéterminées* $X_1, ..., X_2$, *à coefficients dans le corps* $I\!K$: il s'agit d'une relation du type $a_1X_1 + ... + a_nX_n$ où les a_i désignent des constantes numériques, et où les lettres X_i sont à remplacer, selon le contexte, par les diverses lettres désignant les objets à combiner déjà considérés (équations, seconds membres, etc). Mais ça ne correspond pas encore exactement à ce que nous avons appelé formes linéaires (voir chapitre 1, § 2.2) : il ne s'agit pas encore d'une fonction. Mais ces *formes linéaires à n indéterminées* ainsi introduites vont être un outil explicite qui permettra de traduire le travail formel présenté jusqu'à présent sur les systèmes linéaires. L'annonce de cet outil-résolution va se concrétiser dans la suite.

Pour ce faire, les auteurs définissent aussi une *relation entre p formes linéaires* (combinaison linéaire nulle de ces formes linéaires), et à partir de cette nouvelle notion, les auteurs vont considérer ce que Frobenius (voir chapitre 2, § 2.5) appelait le système adjoint d'un système linéaire. Pham & Dillinger n'utilisent pas ces termes, mais utilisent la notation (*S*) et (${}^tS$) pour ces deux systèmes. Les auteurs montrent ensuite que le rang de ces deux systèmes sont égaux. Ainsi, à la fin du premier chapitre de cet ouvrage, Pham & Dillinger ont déjà présenté de nombreuses notions liées à la dualité, mais toujours en relation très étroite avec les systèmes d'équations linéaires. C'est une approche que nous avions qualifiée de naturelle dans le chapitre 2 de notre travail (voir chapitre 2, § 4.6). Remarquons que naturalité ne rime pas nécessairement avec simplicité : les objets manipulés par Pham & Dillinger ne sont pas des plus simples : des formes linéaires, des relations de formes linéaires, des systèmes de relations de formes linéaires !

Le chapitre 2, intitulé "Espaces vectoriels et géométrie", continue de voir exposées principalement des idées, les côtés plus formels étant relégués dans les annexes de l'ouvrage. Bien sûr, des définitions et théorèmes sont présents, mais l'accent est mis sur une grande variété d'exemples. La géométrie reste le point de repère, bien que les objets manipulés ne soient pas tous de nature géométrique : le lien est fait entre les espaces vectoriels et la géométrie affine (une section y est consacrée). Sont également définis dans ce chapitre les notions d'**hyperplan** et de fonctions linéaires, qui correspondent à ce que nous avons appelé des **formes linéaires** (applications définies sur *E* et à valeurs dans $I\!K$). Les auteurs attachent de l'importance à l'interprétation graphique.

Dans le chapitre 3, intitulé "Dualité entre géométrie et calculs", le cas vectoriel et le cas affine sont également tous deux présentés. On y considère un espace vectoriel *E* de dimension *n*. La notion de système de coordonnées linéaires sur un espace vectoriel *E* associé à une base $(e_i)_{i=1}^n$, noté $(x_1, ..., x_n)$, est ce que la plupart des auteurs appellent la base duale de $(e_i)_{i=1}^n$; mais Pham & Dillinger n'utilisent pas ces termes. Bien qu'ils disent qu'il s'agisse de fonctions, Pham & Dillinger n'y associent pas de symbole graphique (par exemple le symbole "flèche" : $\rightarrow$) ni d'expression analytique (comme par exemple $x_i : E \rightarrow K$). A l'approche formelle, les auteurs préfèrent l'intuition et présentent la notion de **base duale** à travers une finalité outil-résolution. Les systèmes de coordonnées sont aussi illustrés au moyen de dessins géométriques en dimension 2.

[37] On appelle *rang* d'un système linéaire le nombre maximal de premiers membres linéairement indépendants de ce système. (Pham & Dillinger 1996, p.63)

L'expression d'une fonction linéaire *l* sur *E* à travers un système de coordonnées linéaires $(x_1, ..., x_n)$ sur l'espace vectoriel *E* permet de faire la liaison avec les formes linéaires à *n* indéterminées $x_1, ..., x_n$ présentées dans le premier chapitre du livre.

Pham & Dillinger montrent que l'ensemble des formes linéaires sur un espace vectoriel *E* est un espace vectoriel. Ils l'appellent **espace dual** de *E* et le note *E**. Les *n* fonctions coordonnées $x_1, ..., x_n$ associées à une base $(e_1, ..., e_n)$ d'un espace vectoriel *E* forment donc une base de *E** ; elles sont dites duales l'une de l'autre. La dualité est ainsi présentée formellement (en tant qu'objet). Ces notions de dualité sont illustrées géométriquement dans le plan.

Le lien entre un hyperplan et le noyau d'une fonction linéaire est explicité, et plus généralement le lien entre un sous-espace vectoriel de codimension *p* et un système de *p* fonctions linéaires linéairement indépendantes. Remarquons qu'un vocabulaire géométrique est employé : à la place de « noyau », ce sont les termes « lieu des zéros » d'une fonction linéaire qui sont utilisés.

Les auteurs expliquent que les notions de dualité introduites permettent également une interprétation géométrique des solutions d'un système linéaire à *n* inconnues $x_1,...,x_n$ (intersection d'hyperplans vectoriels ou affines). Des exemples sont donnés dans $\mathbb{R}^3$, représentés par des dessins.

Les auteurs introduisent ensuite un vocabulaire spécifique pour expliciter le lien entre les formes linéaires à *n* indéterminées et les fonctions linéaires dans le cadre des systèmes linéaires.

Une partie du chapitre 3 est ensuite consacrée au "Calcul matriciel", et reprend un "*point de vue purement formel*", sans "*interprétation géométrique*" (Pham & Dillinger, p.151). Le lien entre les systèmes d'équations linéaires et les matrices est cependant fait explicitement. C'est dans cette section qu'est définie la **matrice transposée** d'une matrice, ainsi que la formule ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$ où les auteurs précisent qu'il faut faire "*attention*" à "*l'ordre inverse*" (p.156). Le côté calculatoire est très clairement privilégié, un peu en analogie avec ce qui s'est passé historiquement (voir chapitre 2, § 2). Remarquons que le rang d'une matrice est défini comme étant le nombre maximum de *lignes* linéairement indépendantes de cette matrice, bien que les auteurs précisent que "*beaucoup d'auteurs définissent le rang comme le nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes*" (p. 162).

On est tenté de faire le parallélisme entre la présentation que les auteurs ont choisi de faire dans leur ouvrage et le développement historique observé (voir chapitre 2 de notre travail) : les premières notions de dualité ont été mises au jour dans le cadre des systèmes d'équations linéaires, et un intermède de calcul matriciel est présenté.

Après l'exposé de cette partie matricielle calculatoire, les auteurs explicitent le lien entre les matrices et les applications linéaires selon deux versions : on peut soit considérer une application linéaire de K^n dans K^p (où *K* est le corps des scalaires), soit considérer une application linéaire *f* d'un espace vectoriel *E*, muni d'un système de coordonnées ($x_1, ..., x_n$), dans un espace vectoriel *F*, muni d'un système de coordonnées ($y_1, ..., y_p$). Le lien entre ces deux considérations est expliqué sous forme de compositions de fonctions (sous forme analytique et graphique) :

$$
\begin{array}{ccc}
F & \xleftarrow{f} & E \\
\downarrow y & & \downarrow x \\
K^p & \xleftarrow{A} & K^n
\end{array}
$$

où la matrice A est la matrice d'un système linéaire, et où x (respectivement y) est l'isomorphisme entre l'espace vectoriel E de dimension n (resp. F de dimension p) et K^n (resp. K^p). Les auteurs expliquent ensuite que les lignes de la matrice A s'interprètent en termes de fonctions coordonnées, et que les colonnes de la matrice A s'interprètent en termes de vecteurs de base.

Pour terminer le chapitre 3, Pham & Dillinger donnent une "*traduction géométrique*" du théorème de réduction des matrices qu'ils avaient donné à la section précédente. Ils en présentent deux démonstrations. Dans la seconde, la dualité (à travers les thèmes des bases duales et d'espace dual) intervient comme outil-démonstration.

La dualité est encore présente dans l'introduction du chapitre 4 consacré aux "*Endomorphismes d'un espace vectoriel*" par l'intermédiaire des systèmes de coordonnées : une première fois en tant qu'outil-illustration (Pham & Dillinger 1996, p.183), et une deuxième fois en tant qu'objet (Pham & Dillinger 1996, p.185) pour signaler que les matrices d'un même endomorphisme dans divers systèmes de coordonnées sont toutes semblables.

Enfin, l'approche formelle plus complète de la dualité est présentée dans l'annexe C du livre de Pham & Dillinger, intitulée "*Structures algébriques*". Cinq pages y sont consacrées. Le **bidual** y est introduit en utilisant implicitement le **théorème de réflexivité**, par analogie avec le dual : un élément l de E^* est une fonction qui associe à un vecteur (variable) v de E un scalaire $l(v)$ dépendant linéairement de v. En considérant v comme fixé et l comme variable, on "*vérifie facilement que ce scalaire dépend linéairement de l*" (Pham & Dillinger 2006, p.331).

Les auteurs en concluent donc que l'application qui va de E^* dans K (le corps des scalaires) et qui à l associe $l(v)$, est un élément du « bidual » (espace dual du dual), qui sera noté $\tilde{v}$: $\tilde{v}(l) = l(v)$.

La **transposée d'une application linéaire** est ensuite définie par le biais d'une composition de fonctions. Pham & Dillinger la représentent par $E^* \xleftarrow{{}^t f} F^*$. Ils citent ensuite une propriété valable pour des espaces de dimension finie ou infinie (si f est surjective, sa transposée ${}^t f$ est injective). Dans le cas de dimension finie, le lien entre les coordonnées de la transposée d'une application linéaire et les systèmes de coordonnées est explicité. Les auteurs s'en servent pour montrer que la matrice de l'application ${}^t f$ (dans les « bonnes bases ») est la transposée de la matrice de f. Pham & Dillinger complètent par la proposition disant que si les espaces E et F sont de dimension finie, la transposée d'une application linéaire injective est surjective.

Ils reprennent ensuite un vocabulaire géométrique pour dire que dans le cas d'espaces vectoriels de dimension finie, « *la relation de dualité est symétrique* : si *E' est dual de E, alors E est dual de E'* » (p. 333), et qu'il en est de même pour la relation de transposition : si f' est l'application transposée de f, alors f est l'application transposée de f'.

Pham & Dillinger introduisent l'**annulateur** d'un sous-espace vectoriel F sous les termes d'*espace conormal* à un sous-espace vectoriel F de E. Ils le notent E^*_F. On retrouve de nouveau un vocabulaire géométrique.

En conclusion, on peut dire que Pham & Dillinger, en reléguant l'aspect (très) formel des choses dans les annexes, se permettent de garder un point de vue intuitif et géométrique dans le développement des idées tout au long des chapitres de leur livre. Ces auteurs semblent s'inspirer de la genèse historique des concepts de dualité : le cadre des systèmes d'équations linéaires est très privilégié pour l'introduction des notions de dualité. L'interprétation géométrique est omniprésente, et l'interprétation en termes d'hyperplans est souvent présentée. On pourrait peut-être qualifier de plus difficiles les sujets et thèmes de la dualité que Pham & Dillinger ont choisi de ne présenter que dans l'annexe : le bidual (et le théorème de réflexivité) et l'application transposée.

Le livre de Merlin

Le livre de Merlin, 400 pages, comporte 18 chapitres, dont les 16 premiers exposent des méthodes concernant un secteur ou un sujet d'algèbre. L'avant dernier chapitre reprend un « best-of » concernant des endomorphismes, et le dernier chapitre reprend une synthèse, en quatre pages, de ce que l'auteur appelle l'essentiel de l'algèbre.

Merlin aborde la dualité au quatrième chapitre de son ouvrage, après avoir traité des méthodes sur l'étude des polynômes, la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples, et des méthodes générales d'algèbre linéaire (espaces vectoriels et applications linéaires). Seuls les espaces vectoriels de <u>dimension finie</u> y sont étudiés.

Merlin prévient le lecteur dès l'introduction du chapitre consacré aux méthodes de dualité :

> Nous ne sommes absolument pas certains que l'ensemble des possesseurs de ce livre (que nous saluons au passage) auront le courage de lire ce chapitre, répugnés qu'ils sont par ce phénomène étrange appelé dualité. (…) faire une impasse sur la dualité est un mauvais calcul, car ce n'est pas si compliqué que cela à comprendre. (…) Tout cela pour vous encourager à vous prendre un petit peu la tête sur ce chapitre : ce sera à notre avis beaucoup plus profitable que d'inverser une matrice 25x25. (Merlin 1995, p. 61).

Il semble clair pour Merlin que la dualité ne constitue pas une fin en soi, mais est présentée dans son ouvrage pour être utilisée. De fait, nous retrouvons dans le chapitre consacré à la dualité diverses finalités outil de ce secteur d'algèbre linéaire.

Merlin commence par présenter des méthodes concernant les **formes linéaires** ; ces dernières sont notées au moyen de lettres grecques : $\varphi, \psi, \ldots$. La notation du **crochet de dualité** est introduite : $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$[38] ; le **dual** d'un espace vectoriel *E* est noté *E**. La trace d'une matrice est donnée comme exemple de forme linéaire, puisqu'il s'agit de la somme des éléments diagonaux d'une matrice. Enfin, l'attention du lecteur est portée sur la différence existante entre une forme linéaire et une forme *n*-linéaire (comme le déterminant d'une matrice d'ordre n). L'<u>outil-analogie</u> est donc mis à profit. Le **théorème de Riesz** (Merlin n'en donne pas le nom) est présenté dans le <u>cadre des espaces euclidiens</u> (espace noté *E*), et une représentation des formes linéaires est aussi donnée dans le <u>cadre matriciel</u> (espace noté $M_n(\mathbb{R})$), à travers la trace. Une <u>interprétation géométrique</u> personnelle est donnée pour le théorème de Riesz dans le cas d'un espace euclidien :

[38] Remarquons qu'il s'agit de la même notation $\langle .,. \rangle$ que celle qui est utilisée dans cet ouvrage pour le produit scalaire. Merlin précisera explicitement par la suite (Merlin 1995, p.64) que les arguments du crochet de dualité sont de nature duale : une forme linéaire et un vecteur, alors que les arguments du produit scalaire sont de même nature.

> En gros, il suffit de bien choisir un vecteur directeur de l'orthogonal du noyau de la forme en question, qui est une droite (ou l'espace nul). (Merlin 1995, p. 62).

Merlin présente ensuite des propriétés des formes linéaires, présentant entre autres ainsi les liens entre ces dernières et les **hyperplans**. Un vocabulaire géométrique est utilisé (formes proportionnelles, etc). Il montre par un exemple analytique l'outil-résolution qui peut être fait des propriétés citées.

Merlin présente ensuite des méthodes concernant ce qu'il appelle l'orthogonalité. Il présente une finalité outil-analogie du crochet de dualité. Il définit l'orthogonal d'un sous-espace *F* de *E*, qu'il note $F^{\perp}$. Il s'agit en fait de ce que nous avons appellé l'**annulateur** d'un sous-espace *F* de *E* (voir chapitre 1, § 2.5). C'est donc de nouveau un vocabulaire et des notations géométriques qui sont utilisés. Tout comme Escofier, Merlin définit aussi l'orthogonal d'un sous-espace *G* du dual de *E* comme étant un sous-espace de *E*. Il le note également $G^{\perp}$. Remarquons que Merlin signale que d'autres auteurs utilisent la notation F° pour l'orthogonal d'un sous-espace *F* (inclus dans *E* ou *E**). Il ajoute qu'il se permet d'utiliser la notation $F^{\perp}$ car :

> A notre avis, ce n'est pas une source de confusion puisqu'on sait toujours dans quel espace se trouve la partie en question. Ce serait plutôt l'accumulation de notations ($F^{\circ}, F^{\perp}$) qui entraînerait cette confusion. (Merlin 1995, p. 64).

Remarquons que Merlin se permet ainsi d'identifier l'espace vectoriel *E* à son **bidual** en justifiant qu'il travaille en dimension finie.

L'auteur présente ensuite des finalités outil-résolution des annulateurs, en donnant des exemples avec des espaces vectoriels génériques (*E*), et dans le cadre des polynômes ($\mathbb{R}_{n-1}[X]$).

Merlin rappelle ensuite la définition de la **base duale** d'une base (e_i) de E ($i = 1,...,\dim E$). Il la note $(e_i{*})$. Il donne des exemples dans l'espace vectoriel des polynômes, car dans ce cas précise-t-il, il est parfois bon de penser à une base autre que la base canonique (les polynômes interpolateurs de Lagrange par exemple).

Merlin se tourne ensuite vers la **transposée d'une application** linéaire $f : E \to F$, qu'il note ${}^t f$. Il en rappelle la définition en termes de composition de fonctions : il s'agit de l'unique application linéaire de $F*$ dans $E*$ telle que : $\forall \psi \in F* \quad {}^t f(\psi) = \psi \circ f$, ou dit de manière plus développée : $\forall \psi \in F* \quad \forall x \in E \quad \left\langle {}^t f(\psi), x \right\rangle_E = \left\langle \psi, f(x) \right\rangle_F$. Le registre graphique n'est pas utilisé. Merlin fait ensuite l'analogie avec la définition de l'adjoint d'un endomorphisme, "*pour ceux qui maîtrisent l'algèbre bilinéaire*". Un exemple est donné en prenant l'opérateur de dérivation sur l'espace des polynômes $\mathbb{R}_n[X]$.

Après avoir rappelé des propriétés concernant les transposées (dont ce que nous avons appelé le théorème fondamental de l'algèbre linéaire), l'utilité de ces relations est expliquée, et un exemple géométrique est donné. Il ajoute que la transposée intervient comme outil-démonstration dans le théorème de trigonalisation qu'il présentera dans la suite de son ouvrage. Enfin, il dit en remarque qu'il y a égalité entre la **matrice transposée** d'une application linéaire *f* et la matrice de l'application transposée ${}^t f$ en précisant les bases par rapports auxquelles les matrices sont exprimées. Aucune application ni exemple ne sont cités.

A la fin du chapitre consacré à la dualité, Merlin cite des erreurs fréquemment commises, et des astuces pour la résolution d'exercices. Des exercices sont ensuite énoncés et corrigés, dans différents cadres.

On retrouve l'utilisation de la dualité au chapitre 6 consacré aux méthodes de calculs matriciels (2ème partie). A la deuxième section dédiée à la trace, il énonce une méthode qui demande d'utiliser le fait que « toute *forme linéaire* est une trace ». Il s'agit là d'une finalité outil-résolution de la dualité qui avait déjà été évoquée par l'auteur dans le chapitre sur la dualité. Il en est de même à la cinquième section de ce chapitre consacrée aux espaces stables dans la méthode qui propose d'utiliser la *transposition* comme outil-résolution : rechercher un hyperplan stable par A, revient à rechercher des droites stables par ${}^{t}A$, c'est-à-dire des espaces propres. Un vocabulaire géométrique est ainsi adopté.

C'est ensuite au chapitre 9 que Merlin reparle de la dualité. Il propose d'utiliser une récurrence et la transposition comme outil-démonstration pour la propriété affirmant que deux endomorphismes trigonalisables qui commutent sont cotrigonalisables (c'est-à-dire trigonalisables dans une même base).

Enfin, au chapitre 14 dédié aux méthodes générales d'algèbre bilinéaire, la finalité outil-définition est mise en œuvre, à travers les formes linéaires, dans la décomposition de Gauss d'une forme hermitienne. Peu après, une finalité outil-analogie de la dualité est mise en œuvre : l'orthogonal d'un sous-espace exprimé à l'aide d'une forme bilinéaire est comparé à l'orthogonal défini au sens de la dualité. Plus loin dans ce chapitre, c'est une finalité outil-résolution qui intervient, à travers les bases duales, dans une méthode qui s'intéresse à la façon de déterminer une base orthonormale.

Enfin, dans le chapitre clôturant son livre, Merlin résume en quatre pages ce qu'il considère comme l'essentiel de l'algèbre. Il y rappelle que lorsqu'on manipule des sous-espaces stables, il est bon de se servir de la transposée. La dualité est ainsi encore considérée comme un outil.

En conclusion, Merlin considère la dualité dans son ouvrage comme un outil à bien des égards : on y trouve des finalités outil-analogie, outil-résolution, outil-définition et outil-démonstration. On pouvait en effet se douter que, vu la spécificité de son ouvrage, la dualité allait principalement être présente sous le statut d'outil. De plus, de nombreux cadres sont présentés.

Le livre de Uhlig : un cas particulier

Dans notre analyse de manuels, nous pouvons qualifier de *cas particulier* le livre d'Uhlig (2002) car cet auteur ne présente pas la dualité en tant qu'objet dans son ouvrage. Pourtant, elle y est belle et bien présente, tout au long des chapitres.

Dans sa préface, Uhlig annonce que son livre met l'accent sur les concepts d'algèbre linéaire et de la théorie des matrices, ainsi que sur l'interprétation des concepts présentés. De fait, les matrices sont omniprésentes dans son ouvrage, et des interprétations géométriques sont données dès que possible sous forme de dessins. Il considère que les applications linéaires et les vecteurs sont les objets fondamentaux de l'algèbre linéaire ; et il représente une application linéaire $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ au moyen d'une représentation matricielle et de formes linéaires : $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ où les $f_j:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont bien entendu des **formes linéaires**. On pourrait parler d'outil-définition d'un thème de la dualité.

Peu après, Uhlig présente le **théorème de Riesz** (Riesz Lemma : p. 24 : représentation d'une forme linéaire à l'aide d'un vecteur fixé et du produit scalaire). Grâce à ce théorème, et à la notion de « *vecteur colonne de Riesz* » qu'il suscite, l'auteur effectuera une lecture des matrices aussi bien colonne par colonne que ligne par ligne, mettant en avant le caractère dual de l'interprétation. C'est donc l'interprétation matricielle qui permet d'entrevoir la dualité.

De plus, Uhlig précise qu'il est plus facile de représenter le produit scalaire $\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{x}$ comme le produit d'une représentation de $\boldsymbol{a}$ par un vecteur ligne et d'une représentation de $\boldsymbol{x}$ par un vecteur colonne. La référence à la représentation des formes linéaires est explicite :

> This is done solely for convenience at this moment. This row-times-column convention for dot products enables us to use a magnificient **shorthand notation** for linear transformations. (Uhlig 2002, p. 25).

Il va ensuite traiter toutes les applications linéaires à travers les matrices grâce à la notation $f(x) = Ax$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire (l'auteur ne considère que les bases canoniques dans les six premiers chapitres). Ainsi, les équations qui permettent de décrire les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ sont représentées plus simplement par des lignes d'une matrice, ce que nous pouvons interpréter comme une référence à la dualité en algèbre linéaire. On peut percevoir là une finalité outil-résolution de la dualité.

La référence à la dualité est encore implicite lorsque l'auteur propose de réduire une matrice à la forme échelonnée *par lignes*, les lignes d'une matrice représentant des équations.

Dans le chapitre consacré aux équations linéaires, la compatibilité d'un système linéaire d'équations $Ax = b$ est présentée en termes de rang, le rang d'une matrice A étant défini comme le nombre de pivots dans la forme échelonnée par la ligne de la matrice A. On peut remarquer que le discours de l'auteur est fortement porté sur la résolution des systèmes linéaires à travers les matrices. C'est également l'image et le noyau *d'une matrice* qui sont définis.

Dans le chapitre dédié aux sous-espaces, l'auteur rappelle que dans la théorie des ensembles, les sous-ensembles d'un ensemble donné peuvent être représentés de deux façons intrinsèques et équivalentes, à savoir inclusivement ou exclusivement. Il utilise explicitement l'adjectif « dual » :

> We apply this dual representation of sets to linear algebra. (Uhlig 2002, p. 115).

Pour introduire la représentation exclusive d'un sous-espace, il fait appel à la notion d'orthogonalité (qui sera davantage détaillée dans un chapitre ultérieur de son livre). L'auteur utilise un langage géométrique pour expliquer la représentation exclusive. Uhlig définit alors le **sous-espace** complément **orthogonal** d'un sous-espace U de $\mathbb{R}^n$, qu'il note $U^{\perp}$. La représentation exclusive d'un sous-espace est interprétée comme étant le noyau d'une matrice composée ligne par ligne (en rapport avec les équations d'un système linéaire). Une référence directe est faite avec l'ensemble des solutions du système linéaire homogène qui y est associé.

On peut percevoir là une finalité outil-définition de la dualité, étant donnée l'association explicite qu'Uhlig avait faite entre une forme linéaire et une ligne d'une matrice.

Remarquons que les explications sont très souvent données à l'aide de dessins de matrices où l'accent est mis sur les lignes ou les colonnes selon les cas.

Dans le chapitre consacré à la dépendance linéaire, aux bases et dimension, on retrouve une section expliquant comment trouver une base pour les deux représentations génériques d'un sous-espace. La dualité y est donc toujours intrinsèquement présente.

Un chapitre est ensuite dédié à la composition d'applications linéaires, à la matrice inverse et à la **matrice transposée**. Quand il s'agit d'introduire la matrice transposée, plus aucune référence, même implicite, n'est faite à la dualité. Il s'agit uniquement d'intervertir les lignes et les colonnes de la matrice. Des propriétés sont citées et démontrées en se basant principalement sur des dessins de matrices interprétées en regardant leurs lignes ou leurs colonnes.

L'auteur présente ensuite une vue duale de la multiplication matricielle *A.B* :

> The foregoing exposition gives us a **dual view** of matrix multiplication *A* times *B*. It depends on which object we focus on: either on the columns of the first matrix factor ***A*** or on the rows of the second one ***B***. (Uhlig 2002, p. 191).

Les égalités suivantes peuvent illustrer ces propos :

$$AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \sum_{i=1}^{n} b_{i1} \begin{pmatrix} | \\ a_i \\ | \end{pmatrix} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} b_{i1} \begin{pmatrix} | \\ a_i \\ | \end{pmatrix} \\ | & & | \end{pmatrix}$$ d'une part et

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} — & b_1 & — \\ & \vdots & \\ — & b_n & — \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \begin{pmatrix} — & b_j & — \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \begin{pmatrix} — & b_j & — \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$ d'autre part.

On peut reconnaître là une finalité <u>outil-illustration</u> de la dualité.

On perçoit aussi la dualité dans le chapitre consacré aux coordonnées de vecteurs et aux changements de base, car l'auteur présente dans ce chapitre le théorème disant que le rang d'une matrice A et de sa transposée A^T sont les mêmes pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. La démonstration de ce théorème fait bien évidemment appel à la forme échelonnée par ligne de la matrice *A*, étant donné que c'est sous cet angle que sont abordés la plupart des concepts présentés dans cet ouvrage.

Cette propriété de la matrice transposée est utilisée dans la preuve[39] du corollaire suivant :

> Considérons le système linéaire $\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_k \\ | & & | \end{pmatrix} x = a$, où $u_1, ..., u_k, x, a \in \mathbb{R}^n$. Soit $U = Span\{u_1, ..., u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ et supposons que le vecteur $a \notin U$. Alors, il existe un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $b \perp U$. De plus, $0 \neq b \notin U$.

On voit donc intervenir la finalité <u>outil-démonstration</u> de la dualité dans l'ouvrage d'Uhlig.

Remarquons l'importance de ce corollaire qui, par exemple, motive la méthode des moindres carrés.

On peut encore percevoir la dualité dans le chapitre consacré aux bases orthogonales et aux matrices orthogonales. Bien entendu on retrouve la transposée d'une matrice quand on parle de matrice orthogonale (cas réel), mais les approches décrivant les représentations inclusive et exclusive d'un sous-espace vectoriel mettent davantage en lumière l'apport d'une approche duale quand il s'agit de compléter un ensemble de vecteurs orthonormés pour

[39] Voir § 1.1, « Outil-démonstration ».

obtenir une base de $\mathbb{R}^n$. Un peu plus loin, pour introduire la factorisation QR d'une matrice, l'auteur dit explicitement qu'il a utilisé à plusieurs reprises dans son ouvrage des concepts duaux :

> We study Householder matrices as generators of the orthogonal ones, all in view of general orthogonal matrix factorizations.
>
> Our early chapters were built on several twofold, or **dual, concepts**:
>
> A matrix A was defined by its entries a_{ij}, or as the representation of a linear transformation $x \mapsto Ax$.
>
> The solvability and unique solvability of a linear system $Ax = b$ were determined by row and by column properties of a REF[40] of A.
>
> The product of two matrices was viewed as a linear replacement of the columns of the first factor or as the same for the rows of the second matrix factor.
>
> Here is another dual concept for matrices: that of an additive and a multiplicative generation of matrices. (Uhlig 2002, p. 334).

En conclusion, on peut dire que, même si Uhlig ne présente pas formellement la dualité, elle est belle et bien présente sous forme naturelle dans son ouvrage. Et si l'on devait retenir une seule leçon de ce que nous avons développé dans la section consacrée à son livre, c'est que les cadres de préférence pour l'approche naturelle de la dualité sont les cadres des systèmes linéaires et celui de la représentation matricielle. On rejoint ici ce qui avait été présenté lors de l'étude de la genèse de la dualité (voir chapitre 2).

2.3. Analyse synthétique et comparative de l'organisation mathématique régionale/locale

Dans cette partie, nous allons présenter de manière synthétique la manière dont sont abordés les différents thèmes de la dualité dans les manuels sélectionnés (voir § 2.1). Les éléments présentés permettront au lecteur de se rendre compte de la diversité du vocabulaire et des notations utilisés pour un même thème.

Le tableau ci-après reprend en colonnes les noms codés des manuels analysés, et en lignes les thèmes que nous avons recensés dans le secteur dualité. Pour chaque manuel, nous présentons trois lignes contenant les informations suivantes : si le thème est présenté dans le manuel, la première ligne reprend le numéro de la page d'apparition du thème. La seconde ligne reprend les termes utilisés pour le thème dans le manuel si ces derniers ne correspondent pas à ceux que nous avons utilisés. Enfin, la troisième ligne présente les notations utilisées pour ce thème dans le manuel.

De nouveau, étant donné que l'ouvrage d'Uhlig ne présente pas le secteur dualité en tant qu'objet, nous n'inclurons pas ce manuel dans la présente analyse.

[40] REF : Row Echelon Form.

	Dual	*Forme linéaire*	*Base duale*	*Annulateur*	*Application transposée*
Halmos	p. 21	p. 20	p. 23	p.26	p.78
		linear functional		annihilator	adjoint
	$\mathcal{V}'$	Y	$\mathcal{X}' = \{y_1, \ldots, y_n\}$	$S°$	y'
Escofier	p.182	p.182	p.184	p.185	p.187
				orthogonal	
	$L(E,K) = E^*$	f	$\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$	$F^\perp$ et $G^\perp$ ($F \subset E$, $G \subset E^*$)	${}^t g$
Pham& Dillinger	p.133	p.75/p.129	p.128	p.131	p.332
		Forme linéaire à *n* indéterminée/ fonctions linéaires sur *E*	Système de coordonnées linéaires sur *E*	Système de coordonnées linéaires associé à un sous-espace vectoriel *F* de co-dimension *p*	
	E^*	ℓ	$(x_1, \ldots, x_n)$	*F* est donné par le système d'équations $\begin{cases} x_1 = 0 \\ \ldots \\ x_p = 0 \end{cases}$	${}^t f$
Merlin	p.62	p. 61	p.66	p.64	p.68
				orthogonal	
	E^*	Φ	$\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$	$F^\perp$ et $G^\perp$ ($F \subset E$, $G \subset E^*$)	${}^t f$

Tableau 3-2 : Thèmes de la dualité abordés dans les manuels sélectionnés

On peut remarquer que tous les thèmes répertoriés dans le secteur dualité sont abordés dans les manuels sélectionnés, mais que les différents auteurs ne les considèrent pas tous de manière équivalente. Ainsi, on remarquera que Halmos n'introduit pas la transposée en même temps que les autres thèmes de la dualité (celle-ci n'apparaît qu'à la page 78, alors que la dualité fait son apparition dès la page 21 de son ouvrage). De même, Pham & Dillinger ne parlent de la transposée que dans l'annexe où ils décrivent plus formellement le secteur. En nous rappelant que Pham & Dillinger privilégient une approche intuitive des choses, nous pouvons alors constater que s'ils choisissent de mettre le thème de la transposée en annexe, c'est qu'ils considèrent qu'il est difficile de présenter une idée intuitive de ce thème. Nous nous souviendrons de cette réflexion lorsqu'il s'agira d'élaborer un dispositif d'enseignement consacré à la dualité.

2.4. Analyse de l'organisation mathématique locale

Nous allons maintenant nous concentrer sur la partie des manuels consacrée explicitement à la dualité. Nous allons dans un premier temps, expliciter les critères d'analyse que nous utiliserons. Ces critères ne sont pas nécessairement tous applicables aux différentes parties de manuels traitant de la dualité. Des distinctions seront parfois nécessaires entre les parties théoriques concernant la dualité, et celles présentant les types de tâches, toujours en rapport avec des thèmes et sujets du secteur dualité.

a) Définition des critères d'analyse composant la grille

Pour la détermination des critères d'analyse que nous allons prendre en compte, nous nous avons considéré les critères d'analyse utilisés par Alvès-Dias (Alvès-Dias 1998), Praslon (Praslon 2000), et Bloch (Bloch 2006), ainsi que des caractéristiques intrinsèques des notions entrant en ligne de compte dans la dualité. Mais nous n'avons finalement retenu que deux critères qui nous semblaient pertinents pour notre analyse, c'est-à-dire ceux qui sont ressortis comme discriminants lors de l'analyse de l'organisation mathématique globale/régionale. Il s'agit du contexte (d'un énoncé, de la présentation d'une notion, etc.), et des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances impliquées (Robert 1998). Nous les présentons avant de les utiliser pour notre analyse.

Contexte (de l'énoncé, de la présentation d'une notion, etc.)

- **Cadres considérés**

Les différents cadres pouvant être rencontrés dans le contexte de notre étude sont les suivants :

- cadre générique (CGén) : l'espace vectoriel n'est pas précisé (souvent noté *E*).
- cadre géométrique (CGéo) : il s'agira essentiellement de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$,
- cadre algébrique (CAlg) : il s'agira souvent de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$, avec $n \neq 1, 2$.
- cadre des systèmes linéaires (CSys),
- cadre des polynômes (CPol)
- cadre matriciel (CMat)
- cadre analytique (CAna) : il s'agira alors d'espaces de fonctions.

- **Spécificités du cadre**

Un même cadre peut avoir des spécificités diverses : si un type d'espace vectoriel est sélectionné ($\mathbb{R}^3$, polynômes, matrices, etc.), définissant ainsi un cadre, la dimension de l'espace et/ou des sous-espaces concernés sont également à prendre en considération. C'est ce que nous appellons la spécificité du cadre.

Niveaux de mise en fonctionnement des connaissances

Robert (1998) définit trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances :

1. le niveau *technique* : il s'agit du niveau de mise en fonctionnement qui est sollicité lorsqu'il « suffit » d'appliquer une procédure ou une méthode pour résoudre une tâche. Le contexte indique généralement les connaissances techniques qui doivent être mises en fonctionnement. Par exemple, une tâche relevant du type « calculer la base duale d'une base $\{e_i\}_{i=1}^n$ donnée » demande un niveau de mise en fonctionnement des connaissances technique, étant donné que la technique associée à ce type de tâches est généralement explicitée dans un cours sur la dualité.

2. le niveau *mobilisable* : les connaissances sont mises en fonctionnement à un niveau mobilisable lorsque le contexte sera suggestif, sans toutefois être explicite quant à la technique à mettre en œuvre pour solutionner la tâche proposée. Ainsi en est-il par exemple pour le type de tâches qui consiste à demander de calculer les coordonnées de p vecteurs de E dans une base $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ non canonique (avec p *suffisamment* grand, c'est-à-dire plus grand que la dimension de l'espace E [41]). Bien que ce type de tâche relève explicitement de l'algèbre linéaire, il n'est pas aussi évident qu'elle peut relever du secteur dualité. Ainsi, la technique consistant dans un premier temps à calculer la base duale de la base $\{e_i\}_{i=1}^{n}$, et ensuite à évaluer les formes linéaires de la base duale en chacun des p vecteurs donnés afin d'en obtenir les coordonnées dans la base de E demande un niveau mobilisable de mise en fonctionnement des connaissances.
3. le niveau *disponible* : des connaissances pourront être mises en fonctionnement à un niveau disponible lorsqu'elles pourront être utilisées dans un contexte inhabituel. Ainsi en est-il pour les notions de dualité lorsque l'on demande par exemple de montrer que, si I est un intervalle réel, et que $t_1,...,t_n$ sont n points distincts, il existe n nombres $m_1,...,m_n$ tels que, pour tout polynôme p de degré inférieur à n, on peut écrire :

   $$\int_I p(t)dt = m_1 p(t_1) + ... + m_n p(t_n) \qquad \text{(formule de quadrature).}$$

   Nous pouvons remarquer que rien n'indique dans l'énoncé de la tâche à accomplir que des notions de dualité peuvent être utilisées pour la mener à bien. A titre d'information pour le lecteur, nous plaçons en Annexe 4 la résolution de cette tâche.

b) Application des critères d'analyse

Maintenant que nous avons mis en place les outils nécessaires à l'analyse locale de la dualité, nous nous proposons de les appliquer aux sections des manuels qui introduisent le secteur dualité, ou plus précisément aux exercices présentés dans ces sections. Nous présentons nos résultats sous forme de tableau. La première colonne du Tableau 3-3 indique le nom de l'auteur (ou des auteurs) du manuel dont il est question. La deuxième colonne explicite le contexte (cadre et spécificité) utilisé pour les exercices selon les notations introduites ci-avant. Enfin, les trois dernières colonnes indiquent *le nombre* d'exercices dont le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est soit technique, mobilisable ou disponible, pour le contexte spécifié sur la ligne.

[41] On prendra p suffisamment grand pour que l'investissement du calcul de la base duale (résolution de n systèmes de n équations) soit avantageux par rapport au fait de calculer, sans passer par la base duale, les coordonnées des p vecteurs séparément les uns des autres (résolution de p systèmes de n équations).

Manuel	Contexte : cadre et spécificité	Nombre d'exercices dont le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est :		
		Technique	**Mobilisable**	**Disponible**
Halmos	CAlg, dim 2	5		
	CGéo, dim 3	4		
	CPol, dim non précisée	6	1	
	CGén, dim finie	4		
	CAlg, dim 3	3		
	CGén, dim 3	1		
	CGén, dim *n*	2		1
Escofier	CGén, dim non précisée	3		
	CAna, dim non précisée	1		
	CPol, dim non précisée	1		
	CAna, dim infinie	3		
	CGéo, dim 3	6		
	CPol, dim *n*+1	1		1
	CPol, dim 3	1	2	
Pham& Dillinger	CGéo, dim 2	4		
	CGéo, dim 3	3		
	CGén, dim *n*	3	2	
	CGéo, dim 4	3		
	CGén, dim 3	2	2	
Merlin	CGén, dim non précisée	1		1
	CMat, dim *n*	1		
	CPol, dim *n*+1	1		2
	Cpol, dim 6			1
	CAna, dim non précisée	1	1	

Tableau 3-3 : Présentation de l'organisation mathématique locale selon les critères définis

On peut s'apercevoir d'une grande variété de la *spécificité du contexte* des énoncés entre les auteurs. En effet, Merlin par exemple ne propose aucun énoncé dans un espace de dimension inférieure à six, alors que 74% des énoncés proposés par Pham & Dillinger le sont dans des espaces de dimension inférieure ou égale à quatre (58% des énoncés de Pham & Dillinger sont même proposés dans des espaces de dimension inférieure ou égale à trois). Ce dernier résultat est tout à fait en accord avec le choix qu'ont fait Pham & Dillinger de mettre l'accent sur l'aspect géométrique dans leur ouvrage. Halmos et Escofier présentent tous deux un bon équilibre entre le pourcentage d'énoncés proposés dans des espaces de dimension inférieure ou égale à trois (respectivement 48% et 47%), et le nombre d'énoncés proposés dans des espaces de dimension *n* quelconque ou non précisée.

Afin d'avoir une vue plus globale de la diversité des cadres et des différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances par manuel, nous résumons maintenant le Tableau 3-3 en en présentant une synthèse par manuel, cadre et niveau de mise en fonctionnement des connaissances. C'est ce que nous présente le Tableau 3-4 :

Manuel	**Contexte : cadre**	**Nombre d'exercices dont le niveau de mise en fonctionnement des connaissances est :**		
		Technique	**Mobilisable**	**Disponible**
Halmos	CAlg	8		
	CGén	7		1
	CGéo	4		
	CPol	6	1	
Escofier	CGén	3		
	CAna	4		
	CPol	3	2	1
	CGéo	6		
Pham& Dillinger	CGéo	10		
	CGén	5	4	
Merlin	CGén	1		1
	CMat	1		
	CPol	1		3
	CAna	1	1	

Tableau 3-4 : Nombres d'exercices présents par manuel, cadre et niveau de mise en fonctionnement des connaissances

Cette présentation (Tableau 3-4) nous permet plus facilement de nous rendre compte que les exercices présentant un niveau de mise en fonctionnement disponible des connaissances se situent généralement dans le cadre des polynômes ou dans le cadre générique. On constate que la majorité des auteurs proposent des énoncés dans quatre cadres différents ; seul Pham & Dillinger se limitent à deux cadres : géométrique et générique.

Remarquons que le cadre géométrique est très présent dans l'ouvrage de Pham & Dillinger car celui-ci traite aussi bien du cas vectoriel que du cas affine. Leur ouvrage présente donc des exercices concernant des « figures géométriques » sans que soient nécessairement en jeu des sous-espaces *vectoriels*.

Enfin, nous présentons une vue encore plus condensée du Tableau 3-3, en ne spécifiant plus que les différents cadres proposés :

Cadre	Nombre d'exercices proposés par cadre dans l'ensemble des quatre ouvrages sélectionnés
CAlg	8
CAna	6
CGén	22
CGéo	20
CPol	17
CMat	1

Tableau 3-5 : Nombre d'exercices présents par cadre dans les quatre manuels sélectionnés

Ainsi, on constate que les trois cadres les plus représentés sont les cadres générique, géométrique et polynomial. Le cadre matriciel n'est proposé que pour un seul énoncé, dans l'ouvrage de Merlin. Que les cadres générique et géométrique soient les plus sollicités n'a rien de bien étonnant : plusieurs exercices consistent à établir certaines propriétés concernant la dualité (cadre générique) et le travail d'énoncés dans un cadre connu et interprétable (cadre géométrique) aide à la compréhension de notions. De plus, certains des manuels sélectionnés abordent très clairement un regard géométrique. Il est donc naturel que ce cadre serve de base à nombre d'exercices. Quant au cadre polynomial, nous l'avons déjà mentionné avant, c'est dans celui-ci que la majorité des exercices mettant en fonctionnement des connaissances disponibles sont présentés. Ce phénomène peut constituer une explication au fait que ce cadre soit finalement bien représenté dans les exercices proposés. Le fait que les matrices servent très peu de cadre au travail de la dualité peut s'expliquer par le fait qu'en algèbre linéaire, les matrices sont principalement considérées comme la représentation d'une application linéaire par rapport à des bases fixées. Elles ne constituent donc pas nécessairement un objet d'étude à part entière ; et les espaces vectoriels de matrices ne serviraient donc qu'artificiellement[42] de cadre à l'apprentissage de la dualité (voir questionnaire « débutants » au chapitre 4).

3. Analyse de l'organisation mathématique ponctuelle

Après avoir décrit, dans les sections précédentes, les organisations mathématiques globales, régionales et locales associées au secteur dualité, nous allons maintenant examiner les praxéologies ponctuelles rencontrées dans les différents thèmes répertoriés dans ce secteur.

Plus précisément, pour chacun des thèmes du secteur dualité décrits au chapitre 1, § 2, nous allons détailler les différents types de tâches répertoriés dans les manuels analysés. Pour ce faire, nous nous sommes basée sur l'ensemble des manuels décrits en Annexe 1, à l'exception des manuels de :

- Mac Lane et Birkhoff (1971) car la présentation de la dualité y suit l'évolution des structures algébriques (diagramme, module, espace vectoriel) et n'y est donc pas présentée selon des types de tâches communs aux autres manuels ;
- Uhlig (2002) car l'auteur ne traite pas de la dualité en tant qu'objet dans cet ouvrage. Il n'y a donc pas présence de type de tâches spécifiques à ce secteur.

[42] c'est-à-dire dans le but d'exercer le niveau technique des connaissances.

En ce qui concerne l'ouvrage de Pham & Dilliger (1996), nous n'avons pas répertorié toutes les tâches rencontrées. En effet, vu le caractère géométrique très marqué de ce manuel, de nombreuses tâches présentes dans ce livre concernent des figures géométriques quelconques (concernant le cas affine et pas nécessairement vectoriel). Nous n'avons pas associé celles-ci à un type de tâches repris dans notre répertoire ci-dessous étant donnée la complexité de la traduction de ces tâches « géométriques » en un type de tâches exprimé dans le langage des espaces vectoriels. Pour illustrer nos propos, considérons par exemple la tâche « *Etant donnée une figure géométrique, trouver un système de coordonnées dans lequel cette figure soit donnée par des équations aussi simples que possible* » (Pham & Dillinger 1996, p.131). Dans le langage des espaces vectoriels, elle pourrait être associée au type de tâches « *Etant donné un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie, déterminer la base duale d'une base de ce sous-espace* » ou encore au type de tâches « *Etant donné un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie, déterminer des formes linéaires définies sur E, linéairement indépendantes, telles que l'intersection de leurs noyaux représente le sous-espace vectoriel donné* », ou encore au type de tâches « *Etant donné un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie, déterminer une base de l'annulateur de ce sous-espace* ». Vue la complexité de la traduction, nous avons préféré ne pas incorporer les tâches présentées dans un cadre géométrique dépassant le domaine de l'algèbre linéaire dans les différents types de tâches repris ci-après.

Nous présentons, dans un premier temps, une liste de types de tâches rencontrés dans la partie traitant explicitement de la dualité dans les neuf manuels retenus. Dans un second temps, nous présentons sous forme de tableau le nombre d'occurrences de ces types de tâches dans les sections traitant explicitement de la dualité dans les neufs manuels retenus.

3.1. Présentation des types de tâches

Nous organisons la présentation des types de tâches selon les différents thèmes.

a) le dual

T.dual.1 Donner la dimension d'un sous-espace du dual (et éventuellement une base de celui-ci)

T.dual.2 Montrer qu'un (sous-espace du) dual est un espace vectoriel

T.dual.3 Vérifier si un ensemble donné est un sous-espace vectoriel du dual

T.dual.4 Etant donné un ensemble de formes linéaires définies sur un espace vectoriel, montrer qu'il s'agit d'une base du dual

T.dual.5 Etant donné un ensemble de formes linéaires définies sur un espace vectoriel, constituent-elles une base du dual ?

T.dual.6 Trouver l'élément du primal correspondant à un élément du bidual ou vice-versa (isomorphisme naturel entre le primal et le bidual)

T.dual.7 Montrer qu'une application donnée appartient au bidual

T.dual.8 Vérifier qu'une application donnée est un isomorphisme entre un espace et son dual

T.dual.9 Un espace vectoriel dual muni d'une nouvelle loi de multiplication par un scalaire (donnée) constitue-t-il encore un espace vectoriel ?

b) les formes linéaires

T.formelin.1 Etant donné un (sous-)espace vectoriel, donner un exemple de forme linéaire définie sur ce (sous-)espace

T.formelin.2 Etant donnée une application, déterminer s'il s'agit d'une forme linéaire (éventuellement avec paramètres)

T.formelin.3 Etant donné un (sous-)espace vectoriel, définir l'expression générale d'une forme linéaire définie sur cet espace

T.formelin.4 Démontrer la proposition établissant l'expression générale d'une forme linéaire sur un espace vectoriel E de dimension n

T.formelin.5 Déterminer l'expression d'une forme linéaire à partir de certaines de ses caractéristiques

T.formelin.6 Déterminer l'expression de toutes les formes linéaires vérifiant une ou plusieurs propriétés

T.formelin.7 Etant donnés des contraintes (conditions), combien peut-on trouver de formes linéaires pouvant les respecter?

T.formelin.8 Déterminer l'existence d'une forme linéaire vérifiant une ou plusieurs contraintes (conditions)

T.formelin.9 Montrer le caractère libre et/ou générateur d'un ensemble de formes linéaires

T.formelin.10 Exprimer une forme linéaire donnée en fonction d'autres (combinaison linéaire)

T.formelin.11 Etant donnée une forme linéaire, en déterminer le noyau, ainsi que sa dimension

T.formelin.12 Montrer que deux formes linéaires ayant même noyau sont proportionnelles

T.formelin.13 Montrer que l'intersection des noyaux de deux formes linéaires (définies sur un espace vectoriel de dimension n) non proportionnelles, est de dimension n-2.

T.formelin.14 Etant donnés une forme linéaire y non nulle définie sur un espace vectoriel E et un scalaire α, existe-t-il un (des) vecteur(s) x de E tel(s) que $y(x) = \alpha$?

T.formelin.15 Etant données m formes linéaires définies sur un espace E de dimension n (avec $m < n$), quelles conditions doivent vérifier les scalaires $\alpha_1, ..., \alpha_m$ pour qu'il existe un vecteur de E tel que la $i^{\text{ème}}$ forme linéaire évaluée en ce vecteur donne α_i

T.formelin.16 Montrer que le calcul d'une intégrale définie revient à l'évaluation de n coefficients et des valeurs prises par un polynôme (formule de quadrature)

c) les bases duales

T.basedu.1 Démontrer que si une famille $(x_1, ... x_n)$ d'un espace vectoriel E de dimension n et une famille $(y_1, ... y_n)$ du dual E' vérifient les relations $y_i(x_j) = \delta_{ij}$, alors ces familles forment des bases de leurs espaces respectifs

T.basedu.2 Etant donnés un espace vectoriel de dimension n et un ensemble de n vecteurs de celui-ci, montrer que (ou déterminer si) cet ensemble représente une base de cet espace, et (dans l'affirmative) en déterminer la base duale

T.basedu.3 Etant donnés un (sous-)espace vectoriel et une base de celui-ci, en déterminer la base duale

T.basedu.4 Etant donné un ensemble de formes linéaires définies sur un espace vectoriel, en déterminer la base du primal dont elle est base duale

T.basedu.5 Etant donnés une base du primal et un vecteur de cet espace, que valent les différentes applications de la base duale évaluées en ce vecteur du primal?

d) les annulateurs

T.annul.1 Etant donné un sous-ensemble du primal, établir l'annulateur de ce sous-ensemble (et éventuellement en donner une base)

T.annul.2 Etant donnés des sous-espaces du primal, établir des relations liant ces sous-espaces ou des compositions de ceux-ci avec les annulateurs de ces sous-espaces ou d'autres compositions

T.annul.3 Etant donnés deux espaces vectoriels (dont les annulateurs sont simples à exprimer), montrer que ces sous-espaces sont égaux

T.annul.4 Etant données m formes linéaires définies sur un espace E de dimension n (avec $m < n$), trouver un vecteur de E non nul sur lequel s'annulent les m formes linéaires

T.annul.5 Etant donné un espace vectoriel E de dimension n sur un champ fini, montrer que le nombre de sous-espaces de E de dimension m est égal au nombre de sous-espaces de dimension $(n\text{-}m)$

T.annul.6 Montrer qu'un ensemble de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n en constitue une base

e) la transposée

T.transp.1 Etant donnée une application linéaire, en déterminer la transposée

T.transp.2 Etant donnée une application linéaire, déterminer le noyau de son application transposée

T.transp.3 Déterminer les endomorphismes laissant stables tous les hyperplans d'un espace vectoriel

T.transp.4 Démontrer des propriétés de la transposée

T.transp.5 Etablir le lien entre annulateur et transposée

T.transp.6 Etant donnée une application, établir des relations concernant la matrice transposée

T.transp.7 Etant donnée une application linéaire, calculer la matrice de l'application transposée

Bien entendu, certains types de tâches ne sont pas complètement indépendants. Ainsi, le type de tâche T.transp.5. "*Etablir le lien entre annulateur et transposée*" répertorié dans le thème intitulé "*la transposée*" a autant sa place dans le thème intitulé "*les annulateurs*". De même, étant donné que les différents thèmes ne sont pas complètement indépendants les uns des autres, un même type de tâches pourrait être répertorié dans deux thèmes différents. Citons l'exemple du type de tâches T.formelin.9. "*Montrer le caractère libre et/ou générateur d'un ensemble de formes linéaires*" qui a été classé dans le thème des *formes linéaires*, mais qui aurait tout autant sa place dans le thème du *dual*.

3.2. Occurrences des types de tâches répertoriés

Nous présentons maintenant, sous forme de tableau, le nombre d'occurrences des différents types de tâches mis en évidence dans la sélection des manuels analysés :

Thème concerné	**Abréviation du Type de tâche (voir section 3.1)**	**Nombre d'exercices répertoriés**
Le dual	T.dual.1	3
	T.dual.2	1
	T.dual.3	1
	T.dual.4	9
	T.dual.5	1
	T.dual.6	2
	T.dual.7	1
	T.dual.8	1
	T.dual.9	1
	TOTAL	**20**
Les formes linéaires	T.formelin.1	0
	T.formelin.2	32
	T.formelin.3	0
	T.formelin.4	3
	T.formelin.5	4
	T.formelin.6	1
	T.formelin.7	2
	T.formelin.8	1
	T.formelin.9	2
	T.formelin.10	3
	T.formelin.11	2
	T.formelin.12	1
	T.formelin.13	1
	T.formelin.14	1
	T.formelin.15	1

Thème concerné	Abréviation du Type de tâche (voir section 3.1)	Nombre d'exercices répertoriés
	T.formelin.16	5
	TOTAL	**59**
Les bases duales	T.basedu.1	1
	T.basedu.2	1
	T.basedu.3	6
	T.basedu.4	7
	T.basedu.5	1
	TOTAL	**16**
Les annulateurs	T.annul.1	9
	T.annul.2	9
	T.annul.3	0
	T.annul.4	1
	T.annul.5	1
	T.annul.6	1
	TOTAL	**21**
La transposée	T.transp.1	1
	T.transp.2	1
	T.transp.3	1
	T.transp.4	7
	T.transp.5	1
	T.transp.6	4
	T.transp.7	2
	TOTAL	**17**

Tableau 3-6 : Occurrences des types de tâches répertoriées dans les manuels analysés

Remarquons que trois types de tâches ont une occurrence nulle. Il s'agit donc de types de tâches qui ne sont présents dans aucun exercice des manuels analysés. Cependant, deux d'entre eux (T.formelin.1 et T.formelin.3) seront utilisés par la suite dans notre travail (voir chapitre 4) ; et le type de tâches T.annul.3 est proposé par Merlin dans son ouvrage, sans toutefois le proposer dans les exercices repris à la fin du chapitre, sans doute parce qu'il s'agit, pour la résolution de ce type de tâches, de mettre les connaissances de la dualité à un niveau de fonctionnement disponible.

On observera que pour le dual, le type de tâche le plus fréquemment rencontré est le T.dual.4. : « *Etant donné un ensemble de formes linéaires définies sur un espace vectoriel, montrer qu'il s'agit d'une base du dual* ». Celui-ci est présent neuf fois, sur 20 occurrences au total de types de tâches concernant le dual : c'est donc pratiquement la moitié. Ceci nous conduit à faire l'hypothèse que les étudiants rencontreront nécessairement ce type de tâches ; c'est le seul pour lequel on puisse faire une telle hypothèse pour ce thème.

C’est sous le thème des formes linéaires que sont regroupées 44,4% (59/133) des occurrences de types de tâches concernant le secteur dualité dans les sections le présentant en tant qu’objet. Parmi ces 59 occurrences, c’est le type de tâches T.formelin.2. : « *Etant donnée une application, déterminer s'il s'agit d'une forme linéaire (éventuellement avec paramètres)* » qui est le plus souvent rencontré, avec 32 occurrences. On peut donc affirmer que les étudiants rencontreront ce type de tâches lors de leur apprentissage de la dualité en algèbre linéaire. En effet, il est clairement essentiel de reconnaître les éléments du dual.

En ce qui concerne les bases duales, deux types de tâches sont majoritaires : il s’agit de T.basedu.4. : « *Etant donné un ensemble de formes linéaires définies sur un espace vectoriel, en déterminer la base du primal dont elle est base duale* », suivi de près par son symétrique : T.basedu.3. « *Etant donnés un (sous-)espace vectoriel et une base de celui-ci, en déterminer la base duale* ». A eux deux, ils comptabilisent plus de 80% (13/16) des occurrences des types de tâches concernant les bases duales. On peut donc dire qu’un étudiant sera très vraisemblablement confronté à des types de tâches T.basedu.3. ou T.basedu.4. au cours de l’enseignement de ce thème. Remarquons cependant que les bases duales constituent le thème le moins représenté dans le secteur de la dualité en nombre d’occurrences de types de tâches (16/133). On pourrait expliquer ce phénomène par le fait qu’une base duale n’est finalement qu’une base particulière d’un espace vectoriel (le dual), vérifiant des conditions de dualité ; les bases étant travaillées par ailleurs (dans le secteur des espaces vectoriels).

Pour les annulateurs, les types de tâches les plus fréquemment rencontrés sont le T.annul.1. : « *Etant donné un sous-ensemble du primal, établir l'annulateur de ce sous-ensemble (et éventuellement en donner une base)* » et le T.annul.2. : « *Etant donnés des sous-espaces du primal, établir des relations liant ces sous-espaces ou des compositions de ceux-ci avec les annulateurs de ces sous-espaces ou d'autres compositions* ». Ensemble, ils représentent 85% (18/21) des occurrences des types de tâches du thème des annulateurs. Remarquons l’importance de ce thème, puisque les annulateurs permettent d’énoncer le théorème fondamental de l’algèbre linéaire, dont la démonstration pourrait d’ailleurs relever du type de tâches T.annul.2. Une application contextualisée du théorème fondamental requiert quant à elle de faire appel à un type de tâches T.annul.1.

Enfin, pour la transposée, le type de tâches ayant la plus grande occurrence est le T.transp.4. : « *Démontrer des propriétés de la transposée* ». On peut interpréter ce constat par le fait que dans l’institution université où est présentée la dualité en tant qu’objet, le contrat didactique institutionnel laisse à l’apprenant la responsabilité de démontrer des propriétés concernant un nouvel objet enseigné.

Conclusion

L’analyse de la dualité comme savoir à enseigner nous a tout d’abord permis de mettre au jour une structuration des notions liées à ce savoir, en rapport avec l’échelle des niveaux de co-détermination didactique (Chevallard 2007). La structuration ainsi établie a été présentée au chapitre 1, § 2.

Dans ce chapitre, nous avons en premier lieu élargi la notion d’*outil* pour un concept mathématique, qui avait été introduite par Douady dans une perspective épistémologique (1986). Nous avons ainsi spécifié différentes *finalités outil* du secteur dualité dans une perspective différente : selon l’objectif poursuivi par un enseignant ou un auteur de manuel. Nous avons ensuite utilisé les différentes finalités outil ainsi introduites, et observé la manière dont elles sont mises en œuvre dans une sélection de onze manuels que nous avons analysés.

Une analyse de l’organisation mathématique des notions de dualité a été réalisée à différents niveaux, toujours en référence aux niveaux de co-détermination didactique, pour les onze manuels sélectionnés. Nous avons choisi de ne présenter l’analyse de l’organisation mathématique aux niveaux global, régional et local que pour cinq des onze manuels analysés, ceux-ci étant représentatifs des diversités mises au jour. L’analyse de l’organisation mathématique ponctuelle est réalisée et présentée sur base des onze manuels initialement retenus, et a été organisée selon les différents thèmes proposés pour le secteur dualité (chapitre 1, § 2).

Toutes ces analyses vont maintenant nous permettre, dans un premier temps, de concevoir des questionnaires à destination des étudiants pour tenter de cerner les difficultés rencontrées lors de l’apprentissage des notions de dualité (chapitre 4). Dans un deuxième temps, nous pourrons nous servir des résultats mis au jour afin de concevoir des dispositifs permettant de remédier aux difficultés recensées (chapitre 5).

Chapitre 4. Les difficultés des étudiants avec la dualité

Notre objectif principal est de comprendre l'origine des difficultés que rencontrent les étudiants dans l'enseignement de la dualité, afin de pouvoir, dans un travail ultérieur (chapitre 5), proposer des dispositifs permettant d'y remédier. Pour ce faire, nous avons adopté un point de vue institutionnel (Chevallard 2007), et nous avons étudié comment le savoir lié à la dualité est structuré en organisations mathématiques plus ou moins générales dans l'institution université (chapitre 3). Nous avons analysé comment la dualité peut apparaître comme objet de l'enseignement, mais également comme outil (chapitre 3, § 1). Ces analyses vont nous permettre d'élaborer, puis d'analyser une enquête menée auprès des étudiants inscrits en mathématique et en physique à l'université de Namur (Belgique).

Après avoir décrit le contexte dans lequel est enseignée la dualité aux étudiants ayant participé à l'enquête (§ 1), les composantes de l'enquête sont détaillées et analysées (§ 2). L'analyse de l'observation des difficultés rencontrées par les étudiants est ensuite présentée (§ 3). Les conclusions de ce chapitre (§ 4) nous permettent d'entrevoir les perspectives de notre recherche.

1. Introduction : contexte général

Nous l'avons déjà brièvement mentionné, une section universitaire *spécifique* et complète (Licences et Masters[43]) existe en Belgique pour les étudiants qui souhaitent devenir mathématiciens ou physiciens (à destination[44] de la recherche, de l'entreprise ou de l'enseignement secondaire supérieur[45]). Le programme mathématique de la première année est majoritairement commun aux deux sections, et comporte, entre autres, un cours d'algèbre linéaire qui est dispensé uniquement à ces étudiants. Il s'agit là du seul cours d'algèbre linéaire qui sera proposé aux étudiants pendant leur cursus. C'est donc dans ce cours qu'est enseignée la dualité. Remarquons que seuls les espaces de dimension finie sont abordés dans ce cours. Le lecteur pourra trouver en Annexe 5 la table des matières du polycopié du cours théorique (Toint 2007), ainsi que les pages de ce polycopié consacrées à la dualité. Ces pages proviennent du polycopié d'une étudiante inscrite en première année (en 2008-2009) en mathématiques à l'université de Namur[46], et ont donc été complétées, par elle, des explications données au cours théorique par le professeur. Remarquons que la dualité y est présentée dans le cadre générique (espace vectoriel E non précisé). Lors de son enseignement, le professeur donne des exemples dans le cadre géométrique ($\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$). L'explicitation des exemples donnés dépend du professeur qui donne le cours[47]. Comme le montre l'extrait (Figure 4-1) des notes de cours placées en Annexe 5, on pourra remarquer que les étudiants n'ont pas vraiment travaillé le bloc practico-technique au cours théorique en 2008-2009 : ce

[43] Il s'agit là de la dénomination française ; dans le vocabulaire de la réforme de Bologne, la dénomination est Baccalauréats et Masters.
[44] Trois finalités du master mathématique existent à l'université de Namur. Les étudiants doivent choisir l'une d'entre elles au cours de leur master.
[45] Le secondaire supérieur correspond au niveau du lycée en France.
[46] Précisons que cette étudiante a réussi son année.
[47] Le cours d'algèbre portant sur la dualité a été assuré par le professeur titulaire l'année académique 2007-2008 et 2008-2009, et par un professeur suppléant en 2009-2010.

qui présenté comme *exemple* pour les espaces primal, dual et bidual, ce sont uniquement les notations $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^{2\,'}$, $\mathbb{R}^{2\,''}$, sans aucune explicitation des éléments de ces différents espaces.

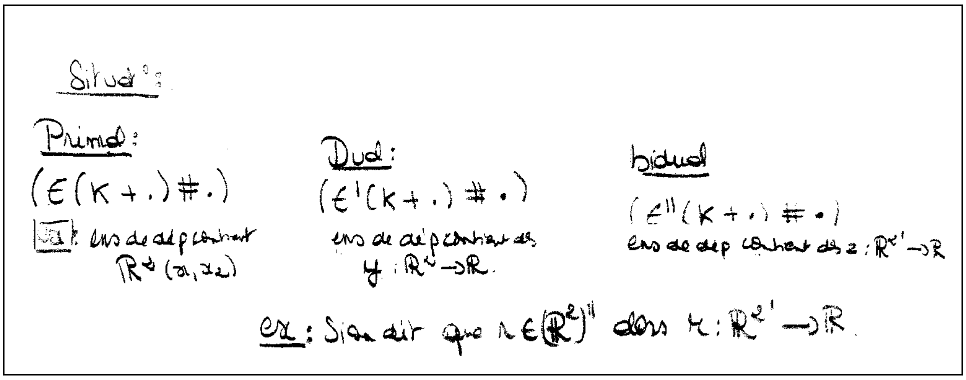


Figure 4-1 : Extrait des notes de cours d'une étudiante de première année

En séances de travaux dirigés, des exercices sont proposés dans les cadres générique, analytique, algébrique et polynomial. Pour les étudiants *inscrits en mathématiques*, le cours théorique et les travaux dirigés sont complétés par un travail de groupe. Ce dernier consiste à faire travailler les étudiants en petits groupes de manière autonome (pas de plage horaire réservée) pendant une période d'environ cinq semaines sur un énoncé de façon à compléter ou approfondir leurs connaissances d'un secteur, thème ou sujet d'algèbre linéaire.

Le tableau ci-dessous présente dans les grandes lignes la partie consacrée à la dualité dans le polycopié du cours théorique d'algèbre linéaire suivi par les étudiants inscrits en première année à l'université de Namur. Remarquons qu'au moment où la dualité est abordée, les étudiants ont déjà vu les espaces vectoriels (comme structure algébrique), les notions d'indépendance et de dépendance linéaire, de dimension, de sous-espace ainsi que des transformations linéaires et des matrices associées. Ainsi, ces thèmes et sujets peuvent être considérés comme « prérequis » dans le Tableau 4-1 :

0. Prérequis :
    a. Espaces vectoriels : structures algébriques, dépendance et indépendance linéaires, bases et dimension, sous-espaces (dimension).
    b. Transformations linéaires (isomorphisme, inverse, noyau, image, rang d'une transformation linéaire); transformations linéaires[48] d'un espace vectoriel *E* dans lui-même (addition et multiplication par un scalaire, transformation inverse, matrices et opérations, matrices et changements de bases); applications linéaires et matrices rectangulaires (produit de deux matrices).
1. **Formes linéaires** (comme cas particulier d'une application linéaire).
2. **Espace dual** (avec l'addition et la multiplication par un scalaire) avec la notation du crochet de dualité; bidual; **bases duales** (avec la propriété de « formes coordonnées utilisée à l'intérieur d'une démonstration) et la réflexivité.
3. **Transformations linéaires et transposées**, et matrice transposée.

Remarque : nous avons mis en gras les thèmes répertoriés dans le secteur dualité.

Tableau 4-1 : Contenu concernant la dualité dans le polycopié du cours théorique d'algèbre linéaire pour les mathématiciens et physiciens à Namur

[48] Dans (Toint 2007), une *transformation* linéaire est une application linéaire d'un espace vectoriel *E* dans lui-même.

Remarquons que les annulateurs ne sont pas présents dans l'enseignement de la dualité à l'université de Namur, et que l'application transposée n'est présentée que dans le cas d'une transformation linéaire (d'un espace vectoriel *E* dans lui-même).

Précisons que dans l'enseignement secondaire, les élèves belges n'ont abordé la notion de vecteurs qu'au *niveau géométrique* (Hillel 1997, p.236). Seule la notion de *matrice* transposée a été présentée aux élèves de section « math forte[49] » de l'enseignement secondaire, principalement lors de la définition de la matrice inverse (qui fait intervenir la transposée de la matrice des cofacteurs). La notion d'application réciproque (f^{-1}) a été enseignée dans l'institution secondaire, et a été illustrée, notamment par les fonctions cyclométriques et les fonctions exponentielles et logarithmes.

Une analyse à caractère épistémologique du contenu mathématique pertinent présenté nous permet de dresser le diagramme suivant, qui peut être interprété comme une carte conceptuelle de la dualité (Figure 4-2) :

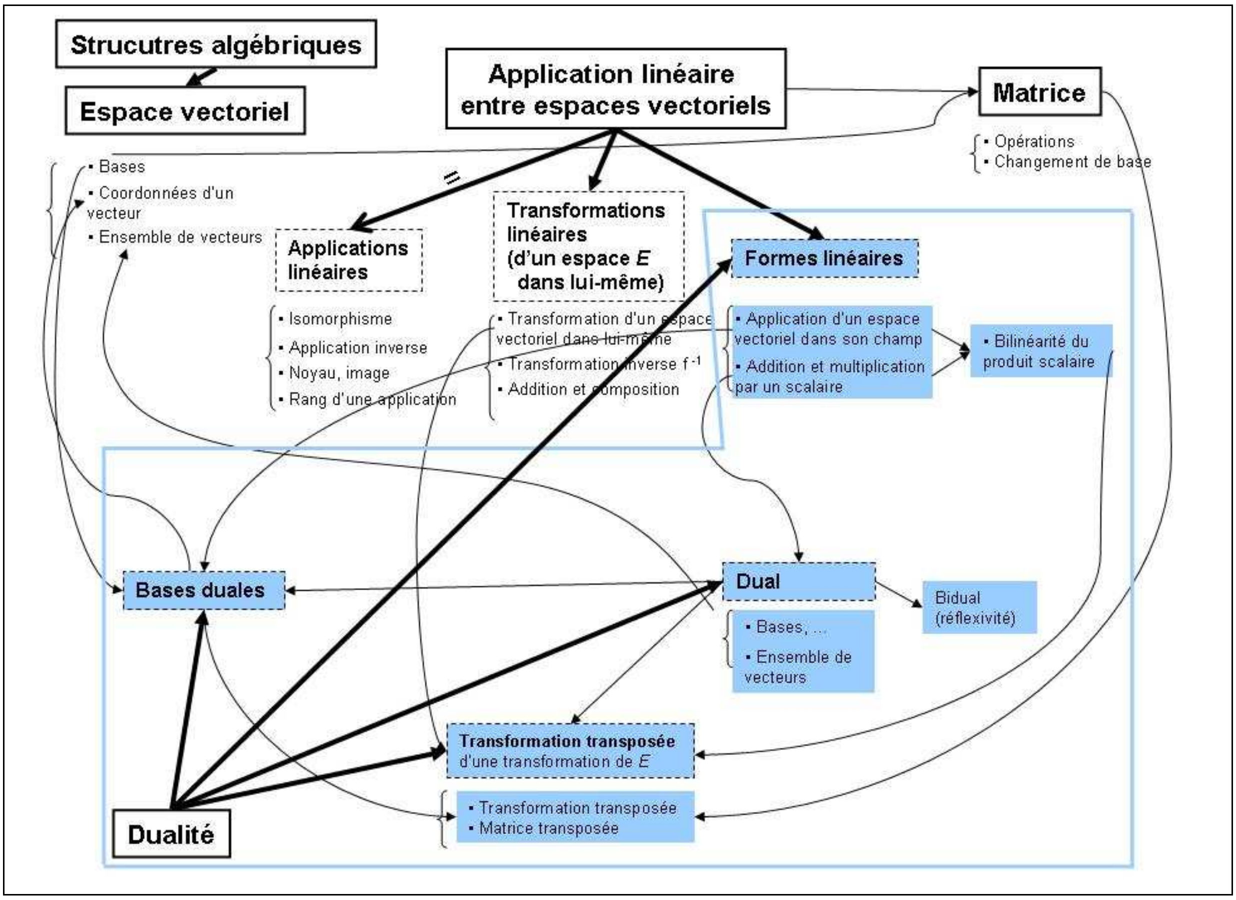


Figure 4-2 : Carte conceptuelle institutionnelle de la dualité élaborée à partir du polycopié d'algèbre linéaire à Namur

[49] L'enseignement secondaire en Belgique correspond à peu de choses près au collège et au lycée en France. Plusieurs filières existent. Dans l'enseignement général, dit de transition, les programmes proposent le choix, pour les deux dernières années du secondaire, entre deux heures de mathématiques par semaine, quatre heures ou six heures. Certaines écoles vont même jusqu'à proposer une section de math à huit heures par semaine. Les sections comportant six (voire parfois huit) heures de mathématiques par semaine sont qualifiées de « math forte ».

La lecture de cette carte conceptuelle institutionnelle (Figure 4-2) peut se faire comme ceci :

- Les cinq cadres en trait plein représentent des secteurs d'algèbre linéaire ;
- Les flèches en gras signifient « est composé de… » ;
- Les autres flèches signifient « intervient dans… » ;
- Les cadres en trait pointillé représentent des thèmes d'algèbre linéaire ;
- Le symbole " **{** " regroupe des sujets reliés au secteur ou au thème situé juste au-dessus (la liste n'est pas exhaustive) ;
- Les zones grisées concernent des thèmes ou sujets relevant du secteur dualité en algèbre linéaire ;
- Les zones non grisées représentent des prérequis.

Les concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire entre espaces vectoriels et de matrice sont considérés dans ce cours comme des secteurs prérequis lorsqu'on étudie la dualité. Pour les espaces vectoriels par exemple, on peut trouver différents thèmes ou sujets associés, comme les bases, les coordonnées d'un vecteur, etc. Dans le secteur des applications linéaires entre espaces vectoriels, on peut trouver comme thème les transformations linéaires (d'un espace vectoriel dans lui-même), mais aussi le thème des formes linéaires, qui est déjà une partie du secteur dualité.

Nous n'allons pas commenter davantage cette carte conceptuelle. Elle nous sert de support pour percevoir les liens entre les praxéologies concernant des sujets regroupés dans un même thème ou support. Cette carte peut aussi être utilisée comme une structure nous permettant d'identifier des aspects de l'évolution et de l'interaction de secteurs que l'on peut soupçonner être la cause de difficultés pour les étudiants. Des exemples sont déjà donnés ci-dessous, et sont développés dans la section 3.

Les formes linéaires, d'abord présentées comme des applications transformant les éléments d'un espace vectoriel en des éléments d'un autre espace (les scalaires en l'occurrence), sont rapidement considérées elles-mêmes comme des éléments d'un espace vectoriel, le dual dans ce cas particulier. Ce phénomène conduit à l'émergence de types de tâches comme « Montrer le caractère libre et/ou générateur d'un ensemble de formes linéaires », ce type de tâches ayant été répertorié sous la codification T.formelin.9 dans le chapitre 3. Et, bien entendu, le dual, en tant qu'espace vectoriel, devient alors un objet intervenant dans la technologie θ et dans la théorie Θ justifiant la technique utilisée pour le type de tâches T.formelin.9. Les étudiants sont alors confrontés à une première transition (selon Winsløw), qui consiste à adjoindre un bloc « technologico-théorique » au bloc « practico-technique » de façon à compléter les praxéologies.

Et, lorsque les transformations transposées sont introduites, le dual devient alors l'espace de « départ » et d' « arrivée » d'une transformation linéaire. On peut alors voir émerger des types de tâches comme celle que nous avions baptisée T.transp.1 : « Etant donnée une application linéaire, en déterminer la transposée ». Et bien sûr, le dual, en tant qu'espace de départ et d'arrivée est maintenant un objet qui intervient dans le bloc practico-technique de la praxéologie dont émane le type de tâches T.transp.1. Ainsi, le dual quitte le bloc « technologico-théorique » de la praxéologie associée à T.formelin.9 pour intégrer le bloc « practico-technique » de la praxéologie associée à T.transp.1. Les étudiants sont alors confrontés, selon Winsløw, au deuxième type de transition.

Des changements de secteurs sont également inévitables. Considérons l'exemple suivant : le type de tâches T_1 « Etant données certaines matrices (présentées comme de simples tableaux de nombres), déterminer si elles sont linéairement indépendantes » est relié au secteur des espaces vectoriels. D'un autre côté, un type de tâches T_2 « Etant données une application linéaire f et des bases, déterminer la matrice associée à f » relève du secteur des applications linéaires. Si un étudiant rencontre ces deux types de tâches dans un laps de temps relativement court, il devra alors changer de secteur alors qu'il travaille avec l'objet « matrice ». Ce fait est susceptible de générer des difficultés auprès des étudiants.

Une dernière remarque peut être formulée au sujet du chevauchement des secteurs intervenant dans la carte conceptuelle. Le thème des bases duales est à la fois relié au secteur des espaces vectoriels, au secteur des applications linéaires et naturellement au secteur de la dualité.

2. Enquête concernant les connaissances sur la dualité

L'enquête que nous avons réalisée à l'université de Namur pour déceler les difficultés des étudiants confrontés à l'enseignement de la dualité est composée de plusieurs parties :

- Un questionnaire à destination des étudiants de première année d'université, inscrits en mathématique ou en physique. Il sera repris par la suite sous la dénomination *questionnaire « débutants »*.
- Un travail de groupe à destination des étudiants de première année d'université, inscrits en mathématiques ;
- Un questionnaire à destination des étudiants de Master, inscrits en mathématique. Il sera repris par la suite sous la dénomination *questionnaire « master »*.

Nous nous proposons maintenant d'expliciter nos choix et d'analyser ces différentes composantes de l'enquête.

2.1. Questionnaire pour les étudiants débutants

Méthodologie

Le questionnaire que nous allons maintenant présenter à été proposé en février 2008 à 37 étudiants inscrits en première année à l'université de Namur en mathématique ou en physique. Il s'agit d'un questionnaire auquel les étudiants ont répondu par écrit. Les étudiants disposaient de deux heures pour y répondre. Des interviews individuelles (semi-structurées) nous ont permis d'éclaircir les réponses au questionnaire pour 16 étudiants. Celles-ci se sont déroulées en mai 2008, après la réalisation du travail de groupe (voir section 2.2). Nous présentons le questionnaire ci-dessous, et plaçons le formulaire pour les interviews en Annexe 6.

Questionnaire « débutants »

Questionnaire à destination des étudiants de première année d'université inscrits en mathématique ou en physique à l'université de Namur

NOM : ………………………….   7 février 2008

Prénom : ………………………..

Section : Math./Physique

Pour répondre aux questions ci-dessous, vous pouvez utiliser, à votre meilleure convenance, le langage mathématique formel, la langue française, des graphiques ou dessins, etc.

1. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, construit sur le champ des réels.
   a. Donner un exemple de forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^4$.
   b. Donner l'expression générale d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^4$.
   c. Soient $x_1 = (1,2,0,4)$, $x_2 = (2,0,-1,2)$, $x_3 = (1,0,0,-1)$, $x_4 = (2,0,0,3)$;

      soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. L'ensemble X constitue-t-il une base de $\mathbb{R}^4$?

      Si oui, déterminez-en la base duale.
   d. Si l'ensemble $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ défini ci-dessus est une base et que vous avez pu en calculer la base duale, quelles seraient les coordonnées du vecteur $(15,8,10,5)$ dans la base X ? Explicitez votre démarche.
   e. Soit la transformation linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ telle que $f(x,y,z,t) = (2x-t, 2y-z, x-y-t, -3z)$.

      Comment en définiriez-vous la transformation transposée ?

2. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2x2}$, l'espace vectoriel des matrices 2 lignes, 2 colonnes, à coefficients réels, construit sur le champ des réels.
   a. Donner un exemple de forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_{2x2}$.
   b. Donner l'expression générale d'une forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_{2x2}$.
   c. Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

      Soit $X = \{M_1, \ M_2, \ M_3, \ M_4\}$.

      L'ensemble X constitue-t-il une base de $\mathcal{M}_{2x2}$?

      Si oui, déterminez-en la base duale.
   d. Si l'ensemble $X = \{M_1, \ M_2, \ M_3, \ M_4\}$ défini ci-dessus est une base et que vous avez pu en calculer la base duale, quelles seraient les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$ dans la base X ? Explicitez votre démarche.
   e. Soit la transformation linéaire $f : \mathcal{M}_{2x2} \to \mathcal{M}_{2x2}$ telle que $f\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-d & a-b-d \\ 2b-c & -3c \end{pmatrix}$.

      Comment en définiriez-vous la transformation transposée ?

Présentation générale

Au moment où le questionnaire « débutants » a été proposé aux étudiants, ces derniers ont déjà vu *en cours et en exercices* les espaces vectoriels (structures algébriques, dépendance linéaire et dimension, sous-espaces vectoriels) ; les applications et transformations linéaires, ainsi que les matrices associées ; les formes linéaires, ainsi que l'espace (et bases) dual(es) et la réflexivité ; les transformations linéaires et transposées. Le cours théorique avait déjà abordé les déterminants, sans que les étudiants n'aient eu les exercices associés en travaux dirigés.

Le questionnaire « débutants » s'intéresse principalement à la dualité en tant qu'objet (Douady 1986). Il est basé :

- sur les éléments identifiés dans l'analyse du polycopié de Namur (voir § 1), étant donné que l'enquête concerne les différents thèmes présents dans le polycopié ;
- sur l'analyse de l'organisation mathématique ponctuelle (voir chapitre 3), pour une sélection de types de tâches ;
- sur la description de la transition décrite par Winsløw, étant donné que l'enquête comprend des types de tâches faisant intervenir la transposée.

Ce questionnaire nous permettra de détecter les difficultés auxquelles les étudiants doivent faire face lors de leur apprentissage des notions de dualité.

Dès le début du questionnaire, nous rappelons aux étudiants qu'ils peuvent formuler leurs réponses au moyen de divers registres de représentation sémiotique (Duval 1995). En effet, cette question nous permet d'observer s'il existe un registre particulier que les étudiants utilisent lorsqu'ils sont confrontés à la dualité. Aussi, nous pouvons observer si plusieurs registres sont utilisés par un même étudiant et observer ainsi l'éventuelle corrélation entre la variation des registres et la compréhension de différents thèmes et sujets de la dualité. Lors du dépouillement des réponses apportées au questionnaire, nous n'avons cependant pas observé de réponses qui rendraient pertinente une analyse en termes de registres de représentation sémiotique. Nous ne nous appuierons donc pas sur ce critère lors du dépouillement.

Le questionnaire comporte deux parties, chacune d'elle étant composée des mêmes types de tâches, mais contextualisés dans des cadres différents. Les deux cadres choisis sont ceux de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, particularisé à $\mathbb{R}^4$; et le cadre des matrices à coefficients réels, particularisé aux matrices carrées de deux lignes et deux colonnes ($\mathcal{M}_{2x2}$). Ces cadres peuvent être qualifiés de contextualisés étant donné qu'ils particularisent le cadre générique en identifiant l'espace vectoriel, noté généralement E dans ce cadre, à des espaces vectoriels permettant des manipulations d'objets (description des composantes des objets considérés).

Comme le souligne Robert :

> Que ce soit pour une prise de sens initiale ou en cours d'apprentissage, réussir à organiser des passages entre un cadre connu et un cadre moins bien maîtrisé nous semble fondamental. (Robert 1998, p. 169).

Le choix du cadre de $\mathbb{R}^4$ se justifie par le fait que, tout en étant moins intuitif que l'espace $\mathbb{R}^3$, ce cadre en utilise pourtant les règles d'addition et de multiplication par un scalaire, et est de ce fait bien connu des étudiants. Le cadre des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes à coefficients réels joue alors le rôle du cadre moins bien maîtrisé. En effet, les étudiants n'avaient pas encore travaillé avec des espaces vectoriels de matrices au moment de répondre au questionnaire « débutants ».

Les différents types de tâches dont relèvent les exercices proposés dans le questionnaire (types que l'on retrouve identiques pour les deux parties du questionnaire) sont présentés dans le Tableau 4-2 ci-après. La dernière colonne du tableau reprend les différents types de tâches présents dans le questionnaire. La première colonne indique le thème de la dualité impliqué dans le type de tâches spécifié dans la dernière colonne. Etant donné que nous avions présenté dans le chapitre 3 l'ensemble des types de tâches repris dans les manuels, le tableau reprend aussi la codification qui avait été introduite dans ce chapitre. Pour la clarté de la présentation, dans la suite de ce chapitre, les types de tâches concernés sont repris sous des termes plus explicites définis dans la dernière colonne du tableau.

Concernant le thème...	**Codification utilisée dans le chapitre 3**	**Types de tâches**
Les formes linéaires	T.formelin.1	Etant donné un (sous-)espace vectoriel, donner un exemple de forme linéaire. Ce type de tâches sera dénommé « Exemple de forme linéaire »
Les formes linéaires	T.formelin.3	Etant donné un (sous-)espace vectoriel, définir l'expression générale d'une forme linéaire définie sur cet espace. Ce type de tâches sera dénommé « Expression générale d'une forme linéaire »
Les bases duales	T.basedu.2	Etant donnés un (sous-)espace vectoriel de dimension *n* et un ensemble de *n* vecteurs de celui-ci, déterminer s'il s'agit d'une base de celui-ci, et dans l'affirmative, en déterminer la base duale. Ce type de tâches sera dénommé « Bases primale et duale »
Les bases duales		Etant données une base et sa base duale, déterminer les coordonnées d'un vecteur du primal. Ce type de tâches sera dénommé « Fonctions coordonnées »
La transposée	T.transp.1	Etant donnés une transformation définie sur un (sous-)espace vectoriel, en définir la transformation transposée. Ce type de tâches sera dénommé « Transformation transposée »

Tableau 4-2 : Types de tâches présents dans le questionnaire "débutants"

Nous pouvons constater que le type de tâches « Fonctions coordonnées » n'était pas repris dans la liste présentée au chapitre 3. Ceci est tout à fait compréhensible étant donné que cette liste ne reprenait que les types de tâches recensés dans les sections de manuels présentant la dualité en tant qu'*objet* (Douady 1986). Le type de tâches « Fonctions coordonnées » implique lui une finalité outil-résolution de la dualité, mais on peut très bien considérer que ce type de tâches fait partie d'une praxéologie relevant du secteur des espaces vectoriels, et lui associer une technique ne faisant pas intervenir les bases duales. Ceci sera détaillé ci-après, puisque nous nous proposons maintenant de présenter les différents types de tâches présents dans le questionnaire « débutants ».

Analyse a priori

a) *Exercices relevant du type de tâches « Exemple de forme linéaire »*

Dans les deux cadres présentés, nous demandons aux étudiants de donner un exemple d'une forme linéaire définie sur l'espace vectoriel en question. Remarquons que lorsque la dualité est abordée au cours théorique d'algèbre linéaire, les étudiants interrogés connaissent déjà bien évidemment les équations (travaillées dans l'enseignement secondaire), mais la trace d'une matrice ne leur a pas encore été définie. Nous pouvons donc nous attendre à obtenir des réponses dans un registre analytique (expression détaillée de la forme linéaire) plutôt que dans le registre de la langue naturelle.

b) *Exercices relevant du type de tâches « Expression générale d'une forme linéaire »*

Il est ensuite demandé aux étudiants de caractériser l'expression générale d'une forme linéaire définie sur les espaces étudiés. En effet, il est essentiel qu'ils puissent établir l'expression générale d'une forme linéaire pour pouvoir caractériser les éléments de l'espace dual (rappelons que le cours ne concerne que la dimension finie). Merlin (1995) parle alors de « catalogue des formes linéaires ». Cette caractérisation est par exemple requise afin de définir les éléments de la base duale d'une base donnée.

c) *Exercices relevant du type de tâches « Bases primale et duale »*

L'énoncé de la question suivante fournit une base de l'espace vectoriel considéré, sans toutefois révéler qu'il s'agit d'une base. Il est demandé aux étudiants si l'ensemble donné constitue une base et, dans l'affirmative, il leur est demandé d'en déterminer la base duale.

Nous pouvons faire remarquer au lecteur que nous avons laissé constantes les composantes des vecteurs de base (par rapport aux bases canoniques) dans les deux cadres considérés, de telle sorte que la finalité de l'exercice dans le second cadre ne soit pas calculatoire.

Pour la résolution de ce type de tâches, deux techniques peuvent être mises en place :

- soit les étudiants résolvent l'exercice globalement en utilisant la propriété selon laquelle étant donnée une famille de *n* vecteurs (e_i) d'un espace vectoriel *E* de dimension *n*, s'il existe une famille de *n* éléments (e_i') de l'espace dual *E* ' telle que $\forall i, j = 1,...,n : e_i'(e_j) = \delta_{ij}$, alors $\{e_i\}_{i=1}^n$ est une base de *E* et $\{e_i'\}_{i=1}^n$ est sa base duale ;
- soit ils résolvent séparément les deux sous-questions en utilisant des procédures détaillées ou raccourcies, en ce sens qu'ils peuvent, pour vérifier que l'ensemble de vecteurs donnés forme une base du primal par exemple :
  - vérifier le caractère libre et générateur de l'ensemble des vecteurs donnés du primal ou
  - vérifier le caractère libre de l'ensemble des vecteurs donnés du primal et utiliser le théorème affirmant que *n* vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel de dimension *n* forment une base.

Nous pouvons donc séparer le type de tâches « bases primale et duale » en deux (sous-)types de tâches que nous pouvons définir de la sorte :

- « Base primale » : étant donnés un (sous-) espace vectoriel de dimension *n* et un ensemble de *n* vecteurs de cet espace, déterminer si l'ensemble de ces vecteurs constitue une base de cet espace.

- « Base duale » : étant donnés un (sous-) espace vectoriel de dimension n et un ensemble de n vecteurs de cet espace (en constituant une base), déterminer sa base duale.

d) Exercices relevant du type de tâches « Fonctions coordonnées »

Dans les deux cadres présentés, la question suivante du questionnaire « débutants » concerne encore le thème « Les bases duales ». Il s'agit, étant données une base et sa base duale, de déterminer les coordonnées d'un vecteur de l'espace vectoriel primal.

Deux techniques peuvent être associées à la résolution de ce type de tâches :

- Calculer les coordonnées du vecteur à partir de leur définition, c'est-à-dire en résolvant un système linéaire de n équations à n inconnues. Remarquons que cette technique ne fait pas intervenir la base duale, et relève du secteur « espaces vectoriels ».
- Appliquer, au vecteur dont on veut calculer les coordonnées, les formes linéaires de la base duale. Les scalaires ainsi obtenus constituent les coordonnées recherchées.

La dernière technique présentée ici fait appel à une fonction « outil-résolution » des bases duales, mais elle n'a pas été travaillée au cours d'exercices par les étudiants qui ont répondu au questionnaire « débutants ». Cette finalité outil des bases duales a été mentionnée au cours théorique à l'intérieur d'une démonstration, mais elle n'a pas été relevée spécifiquement par le professeur (voir démonstration du théorème 2.24 repris en Annexe 5).

e) Exercices relevant du type de tâches « Transformation transposée »

Volontairement, nous nous sommes limitée à la transposée d'une *transformation* linéaire, qui n'est qu'un cas particulier des applications linéaires. En effet, dans le cours théorique que les étudiants interrogés ont suivi, l'application transposée n'a été présentée que dans le cas particulier d'une transformation linéaire. Nous nous restreignons donc aussi à ce cas dans notre questionnaire.

Nous demandons, étant donnée une transformation linéaire, comment en définir la transformation transposée ? La question ainsi posée ne fait pas référence aux matrices associées aux applications linéaires, alors que c'est généralement dans le cadre matriciel que les étudiants, qui avaient déjà entendu parler de transposée dans l'enseignement secondaire, ont rencontré cette notion (en tant que transposée d'une matrice).

2.2. Travail de groupe pour les étudiants débutants

Rappelons que, si le cours théorique d'algèbre linéaire et les travaux dirigés sont destinés à la fois aux étudiants inscrits en première année à la fois en mathématiques et en physique, seuls les étudiants inscrits en mathématiques voient leur enseignement en algèbre linéaire complété par un travail de groupe. Bien entendu, ce travail de groupe est destiné à les aider dans leur apprentissage de l'algèbre linéaire, mais pour l'année académique 2007-2008, nous l'avons également conçu pour nous aider à repérer les difficultés des étudiants dans leur apprentissage de la dualité. C'est sous cet aspect que nous considérons le travail de groupe que nous présentons maintenant.

Méthodologie

La deuxième partie de l'enquête destinée à cerner les difficultés des étudiants lors de l'apprentissage de la dualité en algèbre linéaire consiste donc en un *travail de groupe* auquel ont participé 23 étudiants inscrits en première année d'université en mathématique. Il s'agit des mêmes étudiants que ceux qui ont répondu au questionnaire « débutants », à ceci près que seuls les étudiants de mathématique sont concernés, alors que le questionnaire avait été proposé aux étudiants de mathématique et de physique. L'énoncé du travail de groupe est repris en Annexe 6 (§ 2).

Les étudiants, répartis en quatre groupes de cinq ou six, disposaient de cinq semaines pour rendre un rapport écrit sur le travail demandé. Il leur était recommandé de consulter un assistant au cours des deux premières semaines de leur travail ; et une entrevue (variant de 30 à 90 minutes) était obligatoire lors de la remise du travail (mars 2008). Les échanges lors des différentes entrevues avec les groupes d'étudiants ont été enregistrés.

Remarquons que pendant les cinq semaines que dure le travail de groupe, la matière du cours d'algèbre linéaire continue d'être présentée au cours théorique (voir Annexe 5). Mais les étudiants ne disposent probablement pas d'un niveau de mise en fonctionnement mobilisable et encore moins disponible des notions ainsi présentées au cours théorique pendant ce laps de temps (application adjointe, trace,etc.).

Présentation générale

Le travail de groupe comporte sept parties, numérotées en questions :

- Les deux premières parties du travail de groupe correspondent au deux questions reprises dans le questionnaire « débutants ». Pour rappel ces deux premières parties ont été construites sur base d'un schéma commun, composé de questions relevant de différents types de tâches, mais contextualisé dans deux cadres différents.
- La troisième partie se résume à une question concernant la perception du lien existant entre les deux premières parties.
- La quatrième partie du travail de groupe a été construite sur le même schéma que les deux premières parties mais le cadre considéré est le cadre générique, ce qui implique une adaptation des types de tâches travaillés. De plus, dans ce cadre, de nouveaux types de tâches ont pu être ajoutés par rapport au schéma commun aux deux premières parties (voir description ci-après).
- En cinquième partie, on pose la question de l'utilité du dual et des circonstances dans lesquelles il intervient.
- La sixième partie fait travailler les étudiants sur le *premier* type de tâches présent dans les deux premières parties du travail de groupe, mais pour des espaces vectoriels que les étudiants doivent choisir (différents de ceux déjà manipulés dans le travail de groupe).
- La dernière partie du travail de groupe demande aux étudiants de construire (et ensuite de résoudre) un énoncé semblable à ceux présentés dans les deux premières parties du travail (comportant donc *plusieurs* types de tâches).

Analyse a priori des différentes parties

a) Première et deuxième partie : reprise du questionnaire « débutants »

Pour l'analyse a priori des deux premières questions (parties) du travail de groupe, nous renvoyons le lecteur à l'analyse a priori du questionnaire « débutants » (§ 2.1), étant donné que le questionnaire constitue les deux premières questions de travail de groupe.

b) *Troisième partie : perception du lien existant entre les deux premières questions du travail de groupe*

La troisième question du travail de groupe interroge les étudiants sur l'existence et la nature d'un lien qu'il pourrait y avoir entre les deux premières questions du travail, qui sont composées des mêmes types de tâches mais dans des cadres différents. Il est en effet important de voir si les étudiants parviennent à effectuer des changements de cadres.

c) *Quatrième partie : schéma commun de types de tâches repris et complété dans le cadre théorique algébrique*

Le même schéma de questions est proposé dans le cadre générique car il est important de mesurer de quelle manière l'étudiant connaît, d'un point de vue théorique, les notions en jeu.

Toujours selon l'idée qu' « *il s'agit de proposer des apprentissages qui portent sur divers cadres à propos d'une même connaissance* » (Robert 1998, p.155), le travail de groupe propose en quatrième partie de reprendre le schéma commun du questionnaire « débutants » mais de le présenter dans le cadre générique. Tout en sachant que « *ce n'est pas toujours le travail dans un cadre général, formel, qui est le plus difficile* » (Robert 1998, p.151), nous adaptons le schéma commun aux deux parties du questionnaire « débutants » notamment avec l'apport de nouveaux types de tâches pour le cadre générique :

Sur le thème du dual :

- Type de tâches « définition du dual » : il s'agit de définir le dual d'un espace vectoriel.

Sur le thème des formes linéaires :

- Type de tâches « définition d'une forme linéaire » : il s'agit de définir une forme linéaire sur un espace vectoriel donné.

Sur le thème des bases duales :

- Type de tâches « unicité de la base duale » : on demande aux étudiants si, selon eux, il peut y avoir plusieurs bases duales à une base donnée.

Sur le thème de la transposée :

- Type de tâches « Représentation de la transposée » : on demande aux étudiants s'ils pourraient expliquer, dans un registre de représentation sémiotique qui leur convient, ce que représente la transformation transposée. Par cette question, nous cherchons à savoir si les étudiants perçoivent que la transformation transposée est définie sur l'espace dual, ou encore s'ils perçoivent que la transformation transposée appliquée à une forme linéaire est en fait la composée de cette forme linéaire avec la transformation initiale.

- Type de tâches « Etablir ou démontrer des propriétés de la transposée » : on demande aux étudiants si on peut affirmer que $(f^t)^t = f$. Ces derniers doivent ensuite justifier leur réponse. Cette question nous permet en effet de nous rendre compte de la perception qu'ont les étudiants de la relation existant entre le bidual et le primal et plus particulièrement de l'isomorphisme canonique existant entre ces deux espaces en dimension finie. Il est à noter que l'on peut supposer que les étudiants vont faire une analogie (basée seulement sur les notations employées et non sur les structures) entre la situation présentée dans cette question avec une propriété de l'application réciproque : $(f^{-1})^{-1} = f$ (notion abordée dans l'enseignement secondaire), ou peut-être même de l'application adjointe : $(f^*)^* = f$ (cette dernière notion étant cependant introduite plus tard dans le cours théorique d'algèbre linéaire).

Sur le thème des annulateurs :

- Type de tâches « Etablir la filiation entre un annulateur et le dual » : on soumet aux étudiants le problème suivant : étant donné un ensemble de vecteurs *S*, nous donnons la définition de l'annulateur de *S*, sans cependant mentionner ce nom. Nous affirmons qu'il est facile de vérifier qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel, et nous demandons aux étudiants de citer un espace vectoriel dont l'annulateur est sous-espace. Nous avons volontairement placé cette question à l'intérieur d'une question reprenant plusieurs types de tâches (et non en question à part entière), et particulièrement éloignée de type de tâches se rapportant au thème du dual. Car ainsi, ce type de tâches venant après les types de tâches se rapportant à la transposée, on peut espérer diminuer l'effet pervers du contrat didactique qui consisterait à pousser les étudiants à répondre « le dual » comme seule réponse plausible étant donné le secteur questionné.

d) Cinquième partie : utilité du dual

La cinquième question du travail de groupe interroge les étudiants sur l'utilité du dual et les circonstances dans lesquelles il peut intervenir. Nous interrogeons ici les étudiants sur l'aspect *outil* de la dualité.

Nous cherchons par là à savoir si les étudiants ont une idée de la fonction *outil* que peut avoir la dualité. N'oublions pas que nous nous situons en première année d'université et que les très nombreuses applications de l'algèbre linéaire sont enseignées dans les années futures. Il y a donc fort à parier qu'étant donné qu'ils ont principalement travaillé la fonction *objet* de la dualité, les étudiants aient du mal à être imaginatifs lors de la réponse à cette question.

e) Sixième partie : extension de cadre pour le premier type de tâches proposé dans le schéma commun

La sixième question du travail de groupe reprend le *premier* type de tâches proposé dans le schéma commun, et demande aux étudiants de résoudre ce type de tâches dans trois espaces vectoriels non encore présentés dans le travail.

En plus de demander aux étudiants de donner un exemple de forme linéaire définie sur ces trois espaces différents, il leur est aussi demandé de donner, pour chacun de ces trois espaces, un exemple d'application qui ne soit pas une forme linéaire.

L'algèbre linéaire revêtant le caractère unificateur, il est important que les étudiants puissent se rendre compte de la diversité des espaces vectoriels. De plus, comprendre ce qu'est un objet passe aussi par comprendre ce qu'il n'est pas. C'est la raison pour laquelle on leur demande de donner un exemple d'application qui ne soit pas une forme linéaire.

f) Septième partie : schéma commun à reproduire et solutionner pour un autre espace vectoriel

La septième question de travail de groupe propose aux étudiants de construire une question reprenant le même schéma que dans les deux premières parties du travail de groupe, mais appliqué à un autre espace vectoriel que ceux déjà présents ou produits dans le travail. Les étudiants sont ensuite invités à résoudre l'énoncé construit. Pour ce faire, ils doivent d'abord établir la structure commune aux deux premières questions, et créer ensuite un énoncé sur base de cette structure donnée. Ces compétences transversales sont nouvelles par rapport à ce qu'ils ont l'habitude d'accomplir.

Synthèse des types de tâches concernant la dualité dans le travail de groupe

Le Tableau 4-3 reprend un résumé des types de tâches présents dans les parties 1, 2, 4 et 7 du travail de groupe. La colonne de gauche donne l'intitulé et la notation abrégée des types de tâches qui sont utilisées dans la suite de ce travail. La deuxième colonne détaille le type de tâches ; le thème dont relève le type de tâches est présenté en troisième colonne. La dernière colonne du tableau précise l'endroit où apparaît le type de tâches (Q si le type de tâches est présent dans le questionnaire « débutants », TG s'il est dans le travail de groupe).

Intitulé et notation abrégée du type de tâches	**Description du type de tâches**	**Thème concerné**	**Présent dans :** **- Questionnaire** **- Travail de Groupe**
« Définition du dual » Def_Dual	Définir le dual d'un espace vectoriel.	Le dual	TG
« Exemple de forme linéaire » Exemp_FL	Etant donné un (sous-)espace vectoriel, donner un (contre-)exemple de forme linéaire.	Les formes linéaires	Q TG
« Définition d'une forme linéaire » Def_FL	Etant donné un (sous-)espace vectoriel, définir une de forme linéaire.	Les formes linéaires	TG
« Expression générale d'une forme linéaire » ExpGen_FL	Etant donné un (sous-)espace vectoriel, donner l'expression générale d'une forme linéaire définie sur cet espace.	Les formes linéaires	Q TG
« Bases primale et duale » Bases_P&D	Etant donnés un (sous-)espace vectoriel de dimension n et un ensemble de n vecteurs de celui-ci, déterminer s'il s'agit d'une base de celui-ci, et dans l'affirmative, en déterminer la base duale.	Les bases duales	Q TG
« Unicité de la base duale » Uni_BD	Etant donnée une base, déterminer si elle peut avoir plusieurs bases duales.	Les bases duales	TG
« Fonctions coordonnées » FctCoor	Etant données une base et sa base duale, déterminer les coordonnées d'un vecteur du primal.	Les bases duales	Q TG
« Définition de la transformation transposée » Def_TTransp	Etant donnée une transformation définie sur un (sous-)espace vectoriel, en définir la transformation transposée.	La transposée	Q TG

Intitulé et notation abrégée du type de tâches	**Description du type de tâches**	**Thème concerné**	**Présent dans :** **- Questionnaire** **- Travail de Groupe**
« Représentation de la transposée » Repr_TTransp	Expliquer, dans un registre de représentation sémiotique au choix, ce que représente la transformation transposée.	La transposée	TG
« Propriétés de la transposée » Prop_TTrans	Etablir ou démontrer des propriétés de la transposée.	La transposée	TG
« Annulateur » Annul	Etablir la filiation entre un annulateur et le dual.	Le dual/ les formes linéaires/ les annulateurs	TG

Tableau 4-3 : Types de tâches travaillées dans les questions 1, 2, 4 et 7 du travail de groupe

Comme nous l'avons mentionné à la section précédente, nous sommes parfois amenée, lors de l'analyse des résultats, à subdiviser le type de tâches Bases_P&D en sous-types de tâches. Le Tableau 4-4 nous indique les conventions d'écriture les concernant, qui sont utilisées par la suite.

Intitulé et notation abrégée du Sous-type de tâches	**Description du sous-type de tâches**
« Base primale» Base_P	Etant donnés un (sous-)espace vectoriel de dimension n et un ensemble de n vecteurs de celui-ci, déterminer s'il s'agit d'une base de celui-ci.
« Base duale » Base_D	Etant donnés un (sous-)espace vectoriel de dimension n et une base de celui-ci, en déterminer la base duale.

Tableau 4-4 : Codification de sous-types de tâches

2.3. Questionnaire pour les étudiants de Master

Nous avons choisi d'interroger les étudiants de Master (1 et 2) en mathématique qui avaient suivi le cours d'algèbre linéaire (incluant la dualité) lors de leur passage en première année d'université, principalement pour répondre aux questions suivantes :

- Que reste-t-il de cet enseignement après plusieurs années ?
- Les étudiants de master ont-ils acquis du recul pour situer les notions de dualité dans les mathématiques qu'ils connaissent ?

Remarquons que dans leur cursus, tous les étudiants inscrits en mathématiques à l'université de Namur ont eu un cours de topologie générale (2$^{\text{ème}}$ année du cursus), de géométrie différentielle (2$^{\text{ème}}$ année du cursus) et d'analyse fonctionnelle (3$^{\text{ème}}$ année du cursus) où des notions de dualité sont impliquées. On peut aussi remarquer la présence de cours sur les équations différentielles où les fonctions sont usuellement considérées comme des objets.

On peut se demander, d’une manière générale, si les difficultés rencontrées par les étudiants débutants lors de l’apprentissage de la dualité ne viendraient pas de la non-compréhension de concepts plus élémentaires en algèbre linéaire introduits peu de temps auparavant dans le cours d’algèbre linéaire, telles les notions de base ou de dépendance linéaire par exemple. Si l’on constate que les étudiants de master ne rencontrent pas de difficulté particulière avec la notion de base (par exemple), mais que des difficultés subsistent pour les notions liées à la dualité, on pourrait alors répondre négativement à la question posée en début de ce paragraphe.

Méthodologie

Le questionnaire dont il est question dans cette partie a été proposé en mars 2009 à 12 étudiants de Master 1 et 18 étudiants de Master 2, tous inscrits en mathématiques à l’université de Namur. Le questionnaire écrit a été distribué à ces étudiants en mars 2009. Ils avaient la possibilité de le remplir à leur meilleure convenance, et devaient ensuite nous le rendre. Il leur était vivement recommandé de répondre au questionnaire sans aller revoir leur cours d’algèbre linéaire de première année. Cependant ceci n’était pas interdit, étant donné que nous ne pouvions en assurer la surveillance. Seuls 12 questionnaires (six en Master 1 et six en Master 2) nous sont revenus, malgré plusieurs rappels. Des contacts personnels ont donc été pris auprès des étudiants dont les questionnaires manquaient à l’appel afin de comprendre le manque d’enthousiasme à répondre à ce questionnaire. Nous en parlons dans la présentation des résultats. Nous présentons maintenant ce questionnaire.

Questionnaire « master »

Questionnaire à destination des étudiants de première et deuxième Master en mathématique

NOM : ……………………………….. Mars 2009

Prénom : ………………………………

Master 1 / Master 2 Mathématique

1. Un élève de 1$^{\text{ère}}$ année n’a pas bien compris les notions reprises dans le tableau ci-dessous. Pour chacune de ces notions, pourriez-vous :
   a. situer le contexte ou le cours où ces notions ont été rencontrées et/ou utilisées ?
   b. écrire ce que vous diriez au jeune étudiant pour qu’il puisse comprendre ces notions ?

Notions	**Contexte ou cours où la notion a été rencontrée et/ou utilisée**	**Comment expliqueriez-vous la notion au jeune étudiant ?**
Base		
Forme linéaire		
Dual		
Base duale		

2. Aviez-vous déjà rencontré la notion de matrice transposée dans l'enseignement secondaire ? Si oui, vous rappelez-vous dans quel contexte ?
3. Un élève de 1ère année vient vous voir en disant qu'il n'a pas bien compris le lien entre *application transposée* et *matrice transposée*. Que lui répondriez-vous ?
4. A quoi, selon vous, peut servir une application transposée ? Dans quelles circonstances intervient-elle ?
5. Comment définiriez-vous le dual de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$?
6. Donnez, si possible, (1) une base de $\mathbb{R}^4$, (2) une base de son dual, (3) une application linéaire définie sur $\mathbb{R}^4$ et (4) la transposée de cette application.

   Si cela ne vous est pas possible, pourriez-vous expliquer pourquoi ?
7. Dans un espace de votre choix (qui ne soit cependant pas de type $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$), donner une base et sa base duale, une application linéaire (définie sur l'espace que vous avez choisi) et sa transposée.

   S'il ne vous est pas possible de donner un de ces objets, pourriez-vous expliquer pourquoi ?

Présentation et analyse a priori

Première question : On demande aux étudiants de master de répondre à la question comme s'ils s'adressaient à un étudiant de première année n'ayant pas compris les notions dont il est question dans l'énoncé. Par ce moyen, nous proposons indirectement aux étudiants de master d'utiliser les registres de représentation de leur choix, ainsi que le vocabulaire qui leur convient le mieux pour répondre à la question.

Concernant les notions de *base*, de *forme linéaire*, de *dual* et de *base duale*, nous demandons aux étudiants de master de situer le contexte ou le cours où ces notions ont été rencontrées et/ou utilisées dans leur cursus, et de décrire ce qu'ils diraient au jeune étudiant pour qu'il puisse comprendre ces notions. Cette question nous permet de savoir si l'étudiant de master a toujours en mémoire ces notions, s'il se souvient des contextes où elles ont été rencontrées et/ou utilisées (dialectique outil/objet). Enfin, cette question nous permet de nous rendre compte des cadres choisis par les étudiants de master pour expliciter ces notions.

Le choix des notions interrogées (*base*, de *forme linéaire*, de *dual* et de *base duale*) est fait de façon telle qu'une notion élémentaire d'algèbre linéaire (par rapport à la dualité) soit d'abord questionnée (*base*), pour continuer avec une notion (*forme linéaire*) qui appartient à plusieurs secteurs d'algèbre linéaire, dont celui de la dualité. Viennent ensuite des notions (*dual* et *base duale*) relevant explicitement du secteur de la dualité.

Cela nous permettra de nous rendre compte, plusieurs années après l'enseignement reçu au cours d'algèbre linéaire (qui rappelons-le constitue le seul cours d'algèbre linéaire de leur cursus), de la persistance de ces notions : la notion de base, que l'on pourrait qualifier d'« élémentaire » par rapport aux notions de dualité, est-elle encore disponible (Robert 1998) ? Et qu'en est-il des notions relevant du secteur de la dualité ?

Deuxième question : On demande aux étudiants de master s'ils ont déjà rencontré la notion de *matrice transposée* dans l'enseignement secondaire ; et si oui, dans quel contexte. De cette manière, nous essayons de savoir si cette notion fait partie des pré-acquis de l'étudiant en entrant à l'université, toujours présents dans ses connaissances. Ainsi, nous introduisons, sans encore vraiment parler de dualité, la notion de transposée.

Troisième question : En précisant qu'il s'adresse à un étudiant de première année qui n'a pas bien compris le lien entre *application transposée* et *matrice transposée*, on demande à l'étudiant de master ce qu'il lui dirait. De cette manière, l'étudiant de master peut choisir les cadres et registres qu'il trouve les plus adéquats pour répondre. Le lien entre application transposée et matrice transposée est-il présent pour l'étudiant de master ? Si oui, le cadre « historique » (voir chapitre 2) des systèmes d'équations linéaires sera-t-il évoqué ?

Quatrième question : On pose la question de l'utilité de l'application transposée, et des circonstances dans lesquelles elle intervient. Par cette question, nous nous trouvons plongés dans le secteur de la dualité, sur un thème dont les liens à d'autres secteurs d'algèbre linéaire ne sont pas facilement explicites (voir Figure 4-2).

Cinquième question : On interroge l'étudiant de master sur un autre thème de la dualité (le dual), en demandant comment il définirait le dual de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. Nous utilisons le cadre algébrique de $\mathbb{R}^4$ car celui-ci est normalement familier pour l'étudiant ; de plus, si l'étudiant confond vecteurs et coordonnées, cela ne portera pas à conséquence.

Sixième question : Toujours en restant dans le cadre algébrique de $\mathbb{R}^4$, on demande aux étudiants de master de donner, si possible, une base, une base de son dual, une application linéaire définie sur $\mathbb{R}^4$ et la transposée de cette application. S'ils ne peuvent le faire, on leur demande d'en expliciter les raisons. Ainsi, nous interrogeons maintenant, dans un *contexte* précis :

- une notion « élémentaire » (par rapport à la dualité) d'algèbre linéaire relevant du secteur des espaces vectoriels (*base*) et une notion qui lui est liée dans le secteur de la dualité (*base duale*) ;
- une notion relevant d'un secteur des applications linéaires (*application linéaire définie sur* $\mathbb{R}^4$) et une notion qui lui est liée dans le secteur de la dualité (*application transposée*).

Septième question : La question précédente est répétée ici, mais dans un cadre qui est laissé au choix des étudiants de master, sans cependant concerner un cadre algébrique. De cette manière, nous pouvons évaluer la connaissance de différents espaces vectoriels chez les étudiants de master, et l'illustration dans le cadre choisi des notions présentées à la question précédente.

3. Dépouillement des résultats des composantes de l'enquête

Nous présentons maintenant l'analyse des résultats obtenus aux différentes parties de l'enquête décrites à la section précédente (§ 2). Nous nous proposons de dépouiller tout d'abord (§ 3.1) les résultats des enquêtes impliquant les étudiants débutants, c'est-à-dire inscrits en première année d'université, et de nous tourner ensuite vers l'analyse des réponses des étudiants de Master (§ 3.2).

3.1. Résultats concernant les étudiants débutants

Rappelons que, dans l'enquête présentée dans ce chapitre, deux composantes concernent les étudiants débutants : un *questionnaire* adressé aux étudiants inscrits en mathématique ou en physique, et un *travail de groupe* concernant les étudiants débutants inscrits uniquement en mathématique. Nous proposons dans un premier temps (§ 3.1.a) de présenter des résultats généraux concernant le questionnaire, et dans un second temps (§ 3.1.b) de présenter une analyse conjointe des difficultés observées dans le questionnaire et le travail de groupe.

a) Quelques résultats globaux concernant le questionnaire « débutants »

Le tableau ci-dessous nous présente, pour les différents cadres et types de tâches présents dans le questionnaire, le nombre d’étudiants (sur un total de 37) et le pourcentage d’étudiants ayant *essayé* de résoudre les problèmes correspondants.

Cadres :	**Types de tâches :**					
	Exemp_FL	ExpGen_FL	Base_P	Base_D	FctCoor	Def_TTransp
$\mathbb{R}^4$	36	33	37	19	29	17
	97,3%	**89,2%**	**100,0%**	**51,4%**	**78,4%**	**45,9%**
$\mathcal{M}_{2x2}$	24	21	23	10	15	9
	64,9%	**56,8%**	**62,2%**	**27,0%**	**40,5%**	**24,3%**

Tableau 4-5 : Nombre et pourcentage d'étudiants *essayant de résoudre* les exercices correspondant aux différents types de tâches proposés dans le questionnaire

Le tableau ci-dessous nous présente, pour les différents cadres et types de tâches présents dans le questionnaire, le nombre d’étudiants (sur un total de 37) et le pourcentage d’étudiants ayant *correctement répondu* aux questions correspondant aux types de tâches indiqués.

Cadres :	**Types de tâches :**					
	Exemp_FL	ExpGen_FL	Base_P	Base_D	FctCoor	Def_TTransp
$\mathbb{R}^4$	23	17	32	2	13	1
	62,2%	**45,9%**	**86,5%**	**5,4%**	**35,1%**	**2,7%**
$\mathcal{M}_{2x2}$	10	6	13	1	6	0
	27,0%	**16,2%**	**35,1%**	**2,7%**	**16,2%**	**0,0%**

Tableau 4-6 : Nombre et pourcentage d'étudiants *résolvant correctement* les exercices correspondant aux différents types de tâches proposés dans le questionnaire

Nous présentons maintenant les principaux enseignements de ces résultats chiffrés :

- On remarque que, d’une manière générale, les étudiants préfèrent travailler dans le cadre de $\mathbb{R}^4$ plutôt que dans le cadre des matrices. Les exercices correspondant aux différents types de tâches y sont également mieux résolus. Rien d’étonnant puisque le cadre des *n*-uplets est familier aux étudiants, alors que certains étudiants ne connaissent pas la dimension de l’espace des matrices 2x2 à coefficients réels (Figure 4-3), ou ne conçoivent pas qu’une matrice puisse être considérée comme un élément d’un espace vectoriel (Figure 4-4).

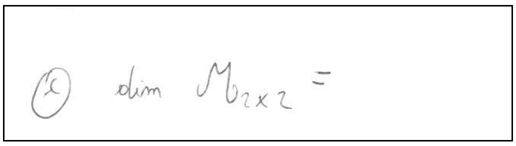


Figure 4-3 : dimension de l'espace non connue

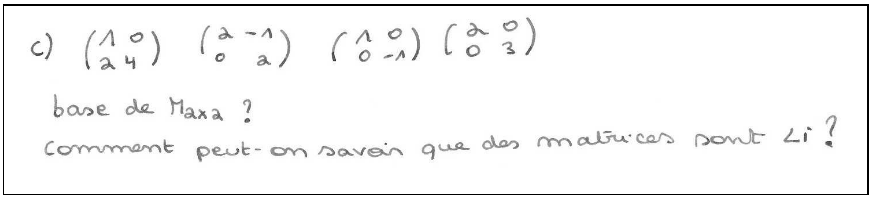


Figure 4-4 : Une matrice n'est pas considérée comme un élément d'un espace vectoriel

- On peut également constater que les étudiants réussissent davantage des exercices relevant de types de tâches davantage algorithmiques et précédemment travaillés tel que le sous-type de tâches Base_P.
- Notons que l'on peut aussi qualifier d'algorithmique la recherche de coordonnées d'un vecteur dans une base (non canonique) donnée. Cet exercice peut relever d'un sous-type de tâches de FctCoor si l'on ne tient pas compte de la donnée de la base duale. C'est au moyen de cette technique que 75,9% des étudiants (soit 22 étudiants sur 29) ayant essayé de résoudre l'exercice relevant de ce type de tâches ont travaillé le problème du questionnaire (Figure 4-5). Le faible taux de réussite (35,1%, soit 13 étudiants) à la question relevant de ce sous-type de tâches dans le cadre de $\mathbb{R}^4$ s'explique par le fait que les étudiants (29,7%, soit 11 étudiants) commettent des fautes de calcul en résolvant le système d'équations linéaires permettant de calculer les coordonnées dans la base du primal.

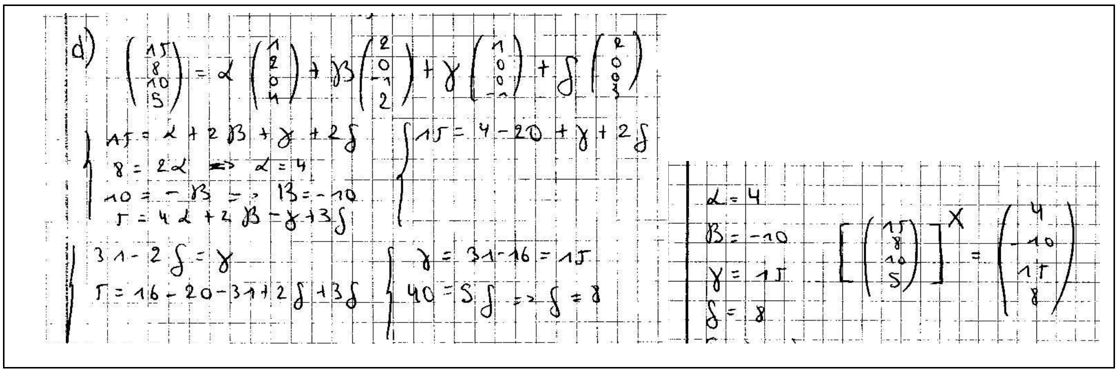


Figure 4-5 : Calcul des coordonnées d'un vecteur par la résolution d'un système linéaire

Trois étudiants ont utilisé la base duale pour résoudre l'exercice correspondant au type de tâches FctCoord dans le cadre de $\mathbb{R}^4$, et un étudiant dans le cadre matriciel, bien que cette technique n'ait pas été travaillée en travaux dirigés. Sur les trois étudiants, seuls deux le font de façon correcte mais ne parviennent pas à la réponse exacte à la suite d'une faute de calcul (Figure 4-6).

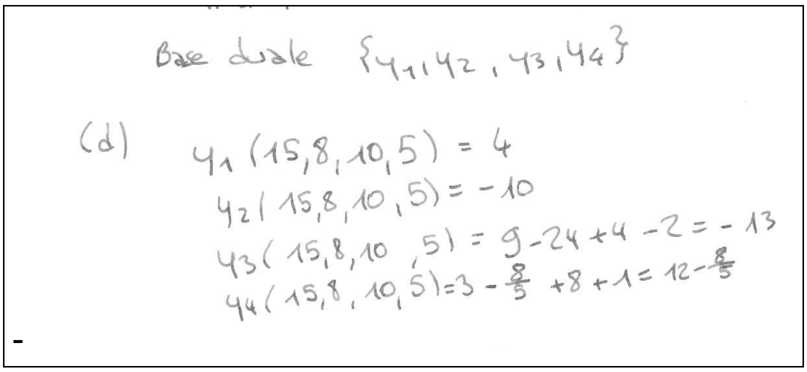


Figure 4-6 : Calcul des coordonnées d'un vecteur au moyen de la base duale

- Enfin, dans la question relevant du type de tâches ExpGen_FL, nous pouvons remarquer que peu d'étudiants utilisent des quantificateurs (13 étudiants, soit 35,1% dans le cadre de $\mathbb{R}^4$; 4 étudiants, soit 10,8% dans le cadre matriciel).
- Du Tableau 4-5 ci-dessus, on peut constater que seuls deux exercices dans le cadre de $\mathbb{R}^4$ sont abordés par moins des trois quarts des étudiants ayant répondu au questionnaire. Il s'agit de l'exercice demandant de calculer la base duale, et celui demandant de déterminer la transposée d'une transformation donnée. Ces exercices relèvent des types de tâches concernant des thèmes explicitement reliés à la dualité, contrairement aux autres types de tâches qui sont également reliés à d'autres thèmes ou secteurs d'algèbre linéaire déjà abordés par les étudiants, tels les applications linéaires, les bases, ou les coordonnées.

  Plus particulièrement, on peut constater à la vue des chiffres des tableaux ci-dessus que la question sur la transposée (type de tâches Def_TTransp) n'est même pas abordée par la moitié des étudiants dans le cadre des 4-uplets, et que les trois quarts des étudiants ayant répondu au questionnaire n'essaient même pas de résoudre la question relevant de ce type de tâches dans le cadre matriciel. De plus, le pourcentage de réponses correctes (Tableau 4-6) est nul dans le cadre matriciel, et ne concerne qu'une seule réponse correcte dans le cadre des 4-uplets (il s'agit d'un étudiant qui recommençait sa première année).

Ces constats numériques nous fournissent de premières observations sur les difficultés des étudiants en dualité. On perçoit déjà des difficultés de différentes natures : difficultés à mener à bien des calculs, difficultés à utiliser le langage mathématique (quantificateurs), à maîtriser les espaces de matrices, etc. Nous allons prolonger et affiner ces constats en proposant une classification raisonnée de ces difficultés.

b) Une classification des difficultés observées

Nous avons choisi de classifier les difficultés apparues lors de l'analyse des réponses des étudiants débutants à l'enquête en trois catégories principales. Il s'agit des difficultés liées à des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, des difficultés communes à l'algèbre linéaire élémentaire et à la dualité, et enfin des difficultés propres à la dualité. Ces catégories ont été établies en fonction de l'échelle des niveaux de co-détermination didactique (Chevallard 2007).

En effet, la première catégorie de difficultés établie fait référence au *domaine* de l'algèbre linéaire, en dehors de ce qui relève spécifiquement de la dualité. La deuxième catégorie de difficultés répertoriées fait référence aussi bien au *domaine* de l'algèbre linéaire qu'au *secteur* de la dualité. Nous placons dans cette catégorie les difficultés qui relèvent de l'algèbre linéaire, mais qui deviennent cruciales lorsqu'on aborde la dualité. Enfin, la troisième catégorie que nous avons définie se rapporte principalement au *secteur* dualité. Bien entendu, la frontière entre ces trois catégories n'est pas nette, et des recouvrements sont possibles.

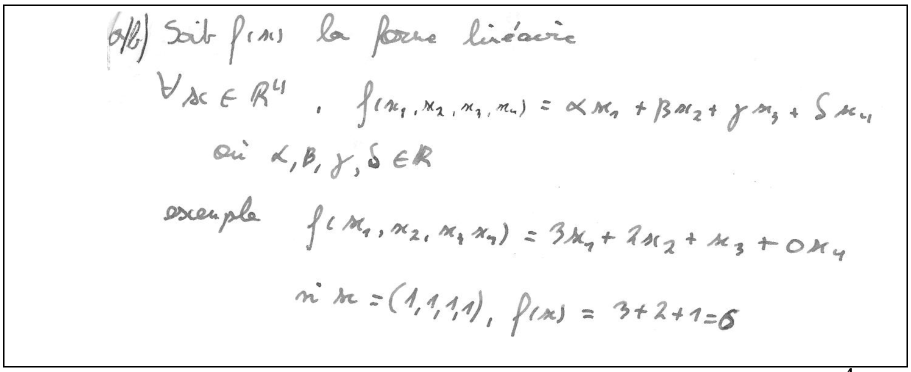
Certaines difficultés, évidemment, sont encore plus générales : par exemple, nous avons pu observer une confusion de la part des étudiants entre une fonction f et la valeur de la fonction en un élément de l'espace de départ : $f(x,y,z,t)$ par exemple. Ou encore, le fait que l'écriture mathématique ne soit pas encore maîtrisée par les étudiants : seuls 37% des étudiants ont utilisé des quantificateurs lors de la résolution de la question correspondant au type de tâches ExpGen_FL (obstacle du formalisme Dorier *et al.*, 1997b). Nous ne détaillons pas ici ce type de difficultés, préférant nous centrer sur l'algèbre linéaire elle-même.

Remarquons que nous rejoignons la réserve émise par Dorier *et al.* (1997b) quant à l'hypothèse que l'introduction d'un cours de logique élémentaire pourrait aider de façon significative les étudiants à surmonter l'obstacle du formalisme (voir deuxième enquête décrite au chapitre 1, § 3.1). En effet, à l'université de Namur où nous avons mené nos enquêtes sur la dualité, les étudiants inscrits en première année de mathématique suivent, dans les sept premières semaines de la rentrée académique, un cours de 30 heures, assorti de 30 heures de travaux dirigés, intitulé « Introduction à la démarche mathématique ». La logique binaire et la théorie des ensembles y sont enseignées, en lien étroit avec des concepts issus des cours d'analyse et d'algèbre linéaire. Nous pouvons remarquer (De Vleeschouwer 2008) que les connaissances de logique et de théorie des ensembles ainsi acquises par les étudiants de mathématique ne sont pas spontanément disponibles lorsqu'ils sont confrontés aux notions d'algèbre linéaire. Spécifions que les étudiants inscrits en première année, section physique, n'ont quant à eux pas ce cours d' « Introduction à la démarche mathématique » inscrit à leur programme, alors qu'ils suivent le même cours d'algèbre linéaire que les étudiants inscrits en mathématique. Si nous observons une différence entre ces sections quant à leur difficulté d'entrée dans les différents niveaux de contrat didactique institutionnel (chapitre 1, § 1.5), nous n'avons pas pu faire de distinction significative entre ces deux sections par rapport à l'obstacle du formalisme en algèbre linéaire.

Difficultés liées à des concepts élémentaires d'algèbre linéaire

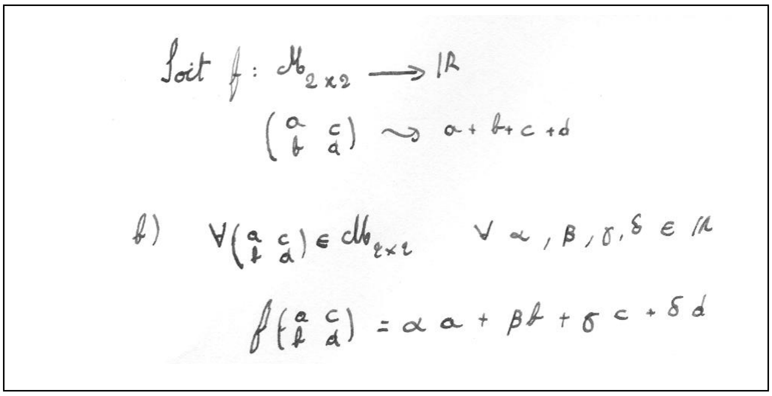
Par concepts élémentaires d'algèbre linéaire, nous entendons des concepts relatifs au *domaine* de l'algèbre linéaire dont la maîtrise est nécessaire pour l'apprentissage de la dualité. Les concepts sont qualifiés d'élémentaires *par rapport* à la notion de dualité que nous étudions. On peut se rappeler ici que dans l'illustration des niveaux de conceptualisation présentée au chapitre 1, § 3.2.b), Robert (1997) positionne le niveau de conceptualisation faisant intervenir la dualité *plus haut* que le niveau de conceptualisation faisant intervenir des notions d'algèbre linéaire ne relevant pas du secteur dualité.

Dans les notions que nous nous permettrons ainsi de qualifier d'*élémentaires*, citons par exemple la notion d'**application** ou de **forme linéaire**. En effet, seuls 62% des étudiants ayant répondu au questionnaire donnent un exemple correct de forme linéaire dans le cadre de $\mathbb{R}^4$. Ce pourcentage tombe à 27 dans le cadre matriciel. Des exemples corrects sont présentés en Figure 4-7 et Figure 4-8. On peut y voir l'expression générale d'une forme linéaire dans les deux cadres travaillés, ainsi qu'un cas particulier avec des valeurs numériques précises, comme demandé dans le questionnaire. Remarquons, à la Figure 4-7, que l'étudiant considère que la forme linéaire est $f(x)$ et non *f*, et qu'il poursuit son illustration jusqu'à calculer un $f(x)$ particulier : $f(1,1,1,1) = 6$, se prouvant ainsi que $f(x)$ est bien un réel. Nous ne remarquons d'ailleurs pas de symboles issus du registre graphique dans sa réponse, contrairement à la Figure 4-8 où l'on trouve le symbole «  » qui semble signifier « est envoyé sur ». On ne peut que rappeler que plus on varie les registres pour les ostensifs, plus l'objet mathématique peut être dégagé de sa ou ses représentations.



a)b) Soit $f(x)$ la forme linéaire
$\forall x \in \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4$
où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$
exemple $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4$
si $x = (1,1,1,1)$, $f(x) = 3+2+1=6$

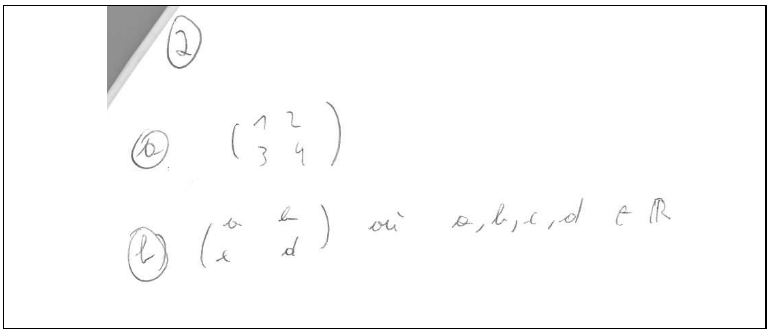
Figure 4-7 : Expression générale et exemple de forme linéaire dans $\mathbb{R}^4$



Soit $f : \mathcal{M}_{2\times2} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow a+b+c+d$
b) $\forall \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2}$ $\forall\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$
$f\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$

Figure 4-8 : Expression générale et exemple de forme linéaire dans M2x2

Des exemples d'erreurs concernant les formes linéaires sont donnés ci-dessous (Figure 4-9 $\rightarrow$ Figure 4-11). La Figure 4-9 concerne le cadre matriciel. L'étudiant ne semble pas concevoir que l'on puisse manipuler des matrices au moyen d'une application. L'objet matrice existe bel et bien, mais n'est relié à aucun autre objet mathématique tel un espace vectoriel ou une application. Par conséquent, l'étudiant donne un exemple particulier de matrice et l'expression générale d'une matrice de $\mathcal{M}_{2x2}$ en lieu et place de donner un exemple particulier et l'expression générale d'une forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_{2x2}$.



2
a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
b $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Figure 4-9 : Difficultés rencontrées avec la notion de forme linéaire

A la Figure 4-10, nous pouvons voir que l'étudiant a bien compris qu'une forme linéaire était une application partant d'un espace vectoriel ($\mathbb{R}^4$ en l'occurrence) vers le champ des scalaires, mais cette notion est très imprécise et n'est encore que théorique. L'étudiant n'est pas capable de relier analytiquement w au quadruplet (x, y, z, t). Le registre utilisé ne laisse entrevoir que de vagues relations entre les objets utilisés (application, espace vectoriel, champ, quadruplet, réel). Aucune référence n'est faite à des valeurs numériques précises ; il y a une complète absence du bloc practico-technique.

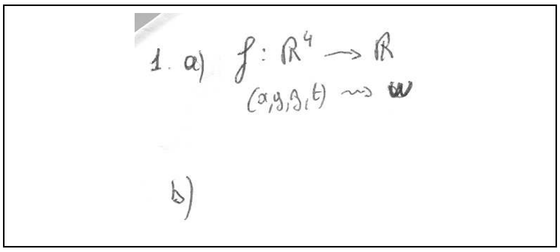


Figure 4-10 : Difficultés rencontrées avec la notion de forme linéaire

A la Figure 4-11, on remarque que la notion de forme linéaire est confondue avec une très imprécise notion d'application (ou transformation). La linéarité est quant à elle interprétée comme étant une utilisation linéaire du ou des coefficients appliqués à un objet de l'espace de départ. Ici, l'étudiant essaie de « théoriser » à sa manière des techniques (manipulations) apprises. Des valeurs numériques particulières sont données, et des écritures mathématiques sont utilisées en dépit du bon sens, étant donné que $\mathcal{M}_{2x2}$ avait été défini dans l'énoncé comme l'*espace vectoriel* des matrices 2 lignes, 2 colonnes, à coefficients réels, construit sur le champ des réels. Nardi & Ianonne (2005) parlent alors de « genre of speech » des étudiants : cette expression signifie que les étudiants utilisent « à leur sauce » des symboles mathématiques pour avoir l'impression d'exprimer leurs idées comme un mathématicien professionnel.

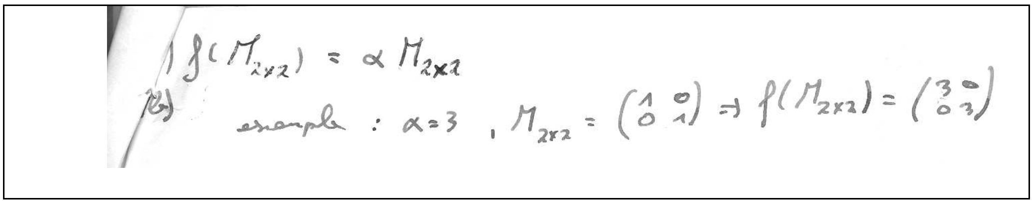


Figure 4-11 : Difficultés rencontrées avec la notion de forme linéaire

Les étudiants éprouvent également des difficultés à fournir des **exemples d'espaces vectoriels**. Ils citent par exemple l'ensemble des polynômes de degré 3 ; ou encore l'ensemble des polynômes de degré *supérieur ou égal* à 3. Certains proposent aussi l'ensemble des matrices de dimension 2x2 pourtant déjà utilisé dans le travail. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{C}^3$ sont également cités, alors qu'ils varient très peu de l'espace $\mathbb{R}^4$ déjà présent dans le travail de groupe. La demande de construction d'exemples est rarement présente dans le secondaire, alors qu'elle est typique des attentes à l'université, bien qu'elle n'y soit pas spécifiquement travaillée ; elle pose donc problème aux étudiants (Praslon 2000).

Au vu des résultats présentés dans les Tableau 4-5 et Tableau 4-6, on peut aussi constater que l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 2x2 ne leur est pas familier. Dans le questionnaire, une analogie entre les deux cadres est mise en évidence par la plupart des étudiants tant au niveau des types de tâches proposés, qu'au niveau de la correction des calculs à effectuer. Mais malgré cette constatation, les étudiants ne parviennent généralement pas à formuler correctement les réponses dans le cadre matriciel. Ainsi, par exemple, un étudiant écrit : « Question 2 : idem que la Question 1 ». Lors de l'interview, cet étudiant dira qu'il avait constaté que l'on retrouvait dans la deuxième partie du questionnaire « les mêmes composantes » que dans la première partie. Il dira aussi qu'il ne savait « pas toujours bien manipuler les matrices ». Et que s'il l'avait fait, il aurait remis les réponses trouvées sous forme de matrices.

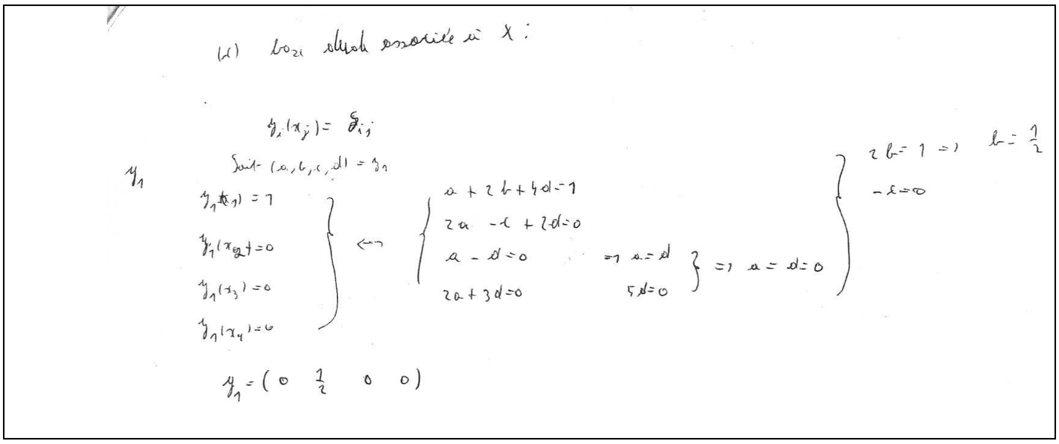
Dans l'institution université, il faut considérer les objets récemment définis en algèbre linéaire comme des objets familiers sur lesquels et à partir desquels on va travailler, par exemple le fait que l'objet *matrice* puisse être considéré comme un élément d'un espace vectoriel, c'est-à-dire un vecteur (élément d'un espace vectoriel). On peut donc considérer les coordonnées d'une matrice, ou encore définir des applications linéaires agissant sur les matrices. On perçoit là une difficulté liée au fait que l'objet matrice puisse appartenir à plusieurs secteurs d'algèbre linéaire, voire plusieurs domaines en mathématiques. En effet, les matrices lorsqu'elles sont étudiées dans l'institution de l'enseignement secondaire en Belgique, le sont habituellement pour elles-mêmes, généralement dans une partie du cours intitulée « calcul matriciel ». Elles peuvent donc être considérées comme appartenant à un domaine des mathématiques à part entière. Ce qui n'est pas sans rappeler l'émergence historique du calcul matriciel (voir chapitre 2). En effet, si le calcul matriciel a émergé dans le cadre de la résolution des systèmes linéaires, il est rapidement devenu un objet d'étude en lui-même, déconnecté de toute autre considération. Dans l'institution université, lorsqu'elles sont introduites dans le cours d'algèbre linéaire, les matrices peuvent être présentées comme un secteur du domaine d'algèbre linéaire fortement connecté au secteur des espaces vectoriels et au secteur des applications linéaires (voir Figure 4-2, page 93).

S'il est important de jouer sur les changements de cadre pour l'apprentissage d'une notion (la dualité en l'occurrence), ceci nécessite en particulier que les étudiants connaissent plusieurs espaces vectoriels.

Difficultés communes à l'algèbre linéaire élémentaire et à la dualité

Nous répertorions ici des difficultés que l'on retrouve en algèbre linéaire (sans nécessairement concerner des thèmes de dualité), mais qui deviennent *cruciales* lorsqu'on aborde la dualité, car leurs conséquences apparaissent alors directement. Nous dirons alors que ces difficultés sont communes à l'algèbre linéaire élémentaire et à la dualité. Citons, par exemple, la difficulté de différencier un vecteur de ses coordonnées. Nous montrons dans cette section que cette confusion, bien connue en algèbre linéaire (Dorier 1997), devient cruciale lorsqu'on aborde la dualité.

Dans le cadre des 4-uplets, on pourrait dire que la confusion entre vecteurs et coordonnées est naturelle ou passe inaperçue. On peut penser que c'est une des raisons pour laquelle les étudiants privilégient ce cadre dans le questionnaire. On constate que les étudiants ont tendance à travailler avec les coordonnées des objets (vecteurs, matrices, formes linéaires) et non avec les objets en eux-mêmes. Ainsi, il n'est pas rare de voir apparaître dans les réponses l'égalité entre la $i^{ème}$ forme linéaire de la base duale (souvent notée y_i par les étudiants dans leurs réponses) et le quadruplet reprenant ses composantes dans la base canonique du dual (que les étudiants ont pourtant appris à noter $[y_i]^{e'}$) (Figure 4-12 et Figure 4-13).


(c) base duale associée à X :

$y_i(x_j) = \delta_{ij}$

Soit $(a, b, c, d) = y_1$

y_1

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x_1) = 1 \\ y_1(x_2) = 0 \\ y_1(x_3) = 0 \\ y_1(x_4) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + 2b + 4d = 1 \\ 2a - c + 2d = 0 \\ a - d = 0 \\ 2a + 3d = 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \Rightarrow a = d \\ 5d = 0 \end{array} \Big\} \Rightarrow a = d = 0 \Bigg\} \begin{array}{l} 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \\ -c = 0 \end{array}$$

$y_1 = (0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0)$

Figure 4-12 : Egalité entre une forme linéaire et ses composantes dans la base canonique duale (dans le cadre de $\mathbb{R}^4$)

D’aucun pourrait dire que l’erreur présente à la Figure 4-12 est classique et ne porte pas vraiment à conséquence, tant qu’on reste dans le cadre de $\mathbb{R}^4$. En effet, en tant que mathématiciens, nous savons que nous pouvons identifier un vecteur avec ses composantes dans une base donnée, que nous ne prenons pas non plus la peine de préciser lorsqu’il s’agit de la base canonique. Mais nous savons les raccourcis que nous prenons en pensant ainsi, et nous pouvons les justifier. Il n’en est pas de même pour les étudiants en apprentissage de ces notions.

Cette confusion, liée à des effets du contrat didactique, peut mener à des erreurs, même dans le cadre de $\mathbb{R}^4$. A titre d’exemple, citons la réponse d’une étudiante qui, pour résoudre l’exercice correspondant au type de tâches FctCoord dans le cadre de $\mathbb{R}^4$, utilise la base duale de façon erronée : ayant calculé la base duale *Y’* de la base *X* donnée, elle identifie les vecteurs de la base duale aux coordonnées de ces vecteurs dans la base canonique du dual. La Figure 4-13 montre comment cette étudiante détermine le dernier vecteur de la base duale et indique sous quelle forme elle décrit la base duale (de la base de $\mathbb{R}^4$ donnée dans l’énoncé) dans $(\mathbb{R}^4)$’. Il y a bien identification entre les vecteurs de la base duale et leurs coordonnées dans la base canonique du dual. Ensuite, cette même étudiante, voulant utiliser toutes les informations contenues dans l’énoncé de l’exercice relevant du type de tâches FctCoord (effet du contrat didactique), utilise les quadruplets reprenant les coordonnées des vecteurs de la base duale comme vecteurs de la base dans laquelle il est demandé d’effectuer le calcul des coordonnées du vecteur de $\mathbb{R}^4$ fourni dans l’énoncé. C’est ce que nous montre la Figure 4-14, qui reprend un extrait de la copie de cette étudiante.

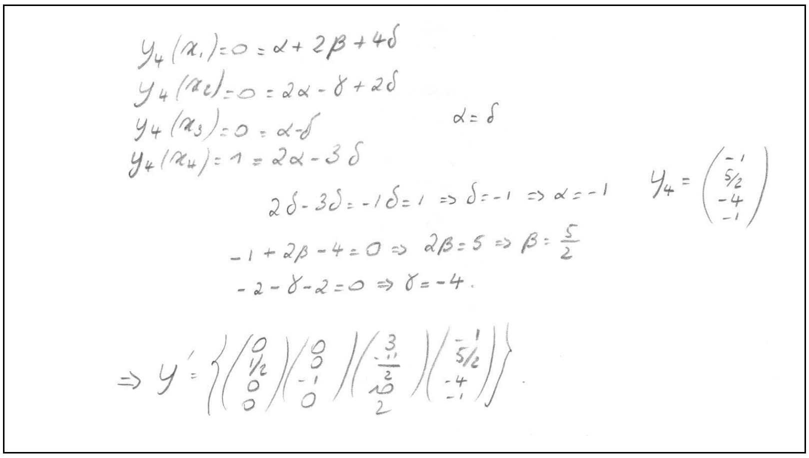


Figure 4-13 : Identification des vecteurs d'une base du dual aux composantes de ces derniers dans la base canonique du dual

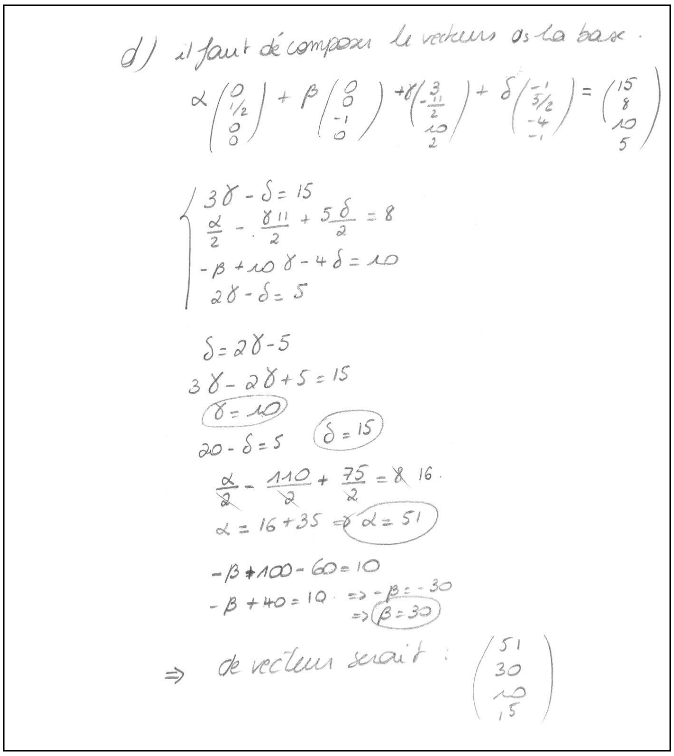


Figure 4-14 : Erreur consécutive à la confusion entre les éléments de la base duale et leurs coordonnées

Un autre problème que nous avons pu identifier est le fait que les étudiants ont tendance à présenter la solution d'un exercice sous la forme d'un élément de l'espace vectoriel servant de cadre à la tâche ($\mathbb{R}^4$ ou $\mathcal{M}_{2x2}$).

Ainsi, lors de la résolution d'exercices correspondant au type de tâches FctCoor (portant sur le calcul des coordonnées d'un élément (quadruplet ou matrice) de l'espace vectoriel considéré), il n'est pas rare de voir des étudiants présenter les coordonnées calculées ou déduites (dans la deuxième partie par analogie par rapport à la première partie) sous la forme d'un vecteur de l'espace vectoriel servant de cadre à la tâche, c'est-à-dire sous forme de 4-uplet dans $\mathbb{R}^4$ et sous forme de matrice dans l'espace des matrices carrées de dimension deux. Ainsi, lorsque l'on demande aux étudiants de donner les coordonnées de la matrice

$\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$ dans une base définie (non canonique) de $\mathcal{M}_{2x2}$, certains étudiants répondent que les coordonnées sont $\begin{pmatrix} 8 & 30 \\ -20 & 16 \end{pmatrix}$, et non $\begin{pmatrix} 8 \\ -20 \\ 30 \\ 16 \end{pmatrix}$. La Figure 4-15 nous montre une copie d'étudiant présentant ce type d'erreur dans le cadre des matrices, après avoir effectué le calcul des coordonnées ; la Figure 4-16 montre également ce type d'erreur dans le cadre des matrices, où les coordonnées ont été établies suite à l'analogie repérée entre les énoncés présentés dans les deux cadres du questionnaire.

Etant donné que cette erreur se retrouve également dans la rédaction des quatre travaux de groupe, on peut parler d'erreur persistante à son sujet.

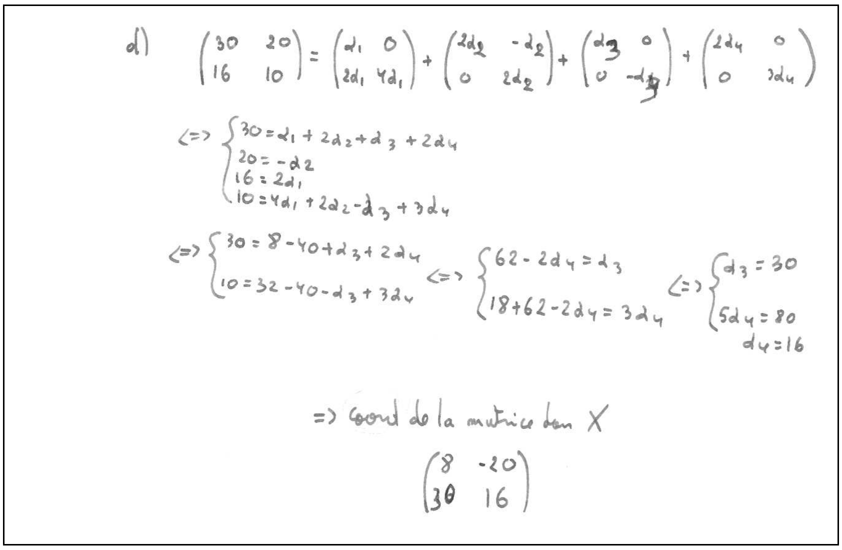


Figure 4-15 : Présentation des coordonnées sous forme de matrice, suite à un calcul de ces dernières

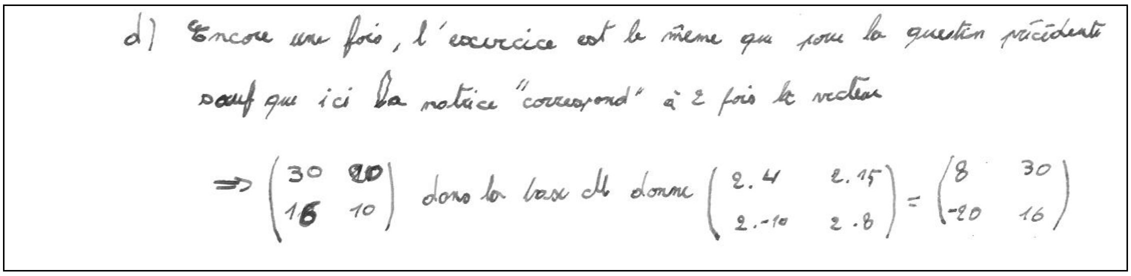
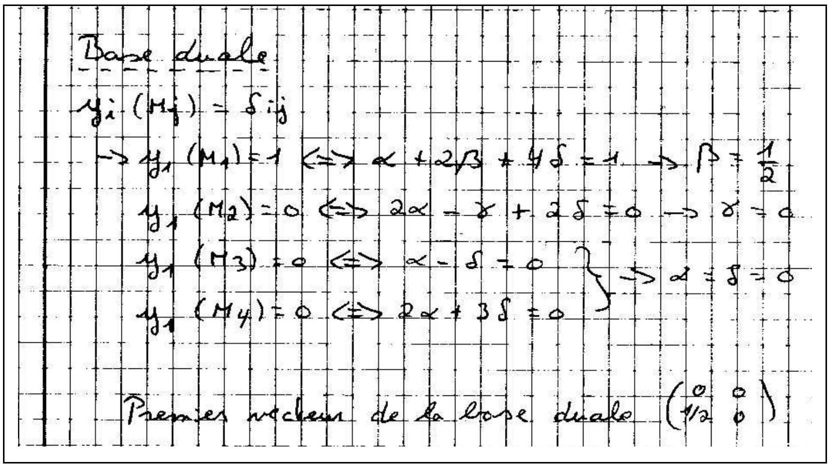


Figure 4-16 : Présentation des coordonnées sous forme de matrice, suite à l'analogie entre les cadres proposés

Cette erreur se retrouve également dans le cadre de $\mathbb{R}^4$ concernant le type de tâches FctCoor, lorsque, quand on demande de donner les coordonnées du vecteur $(15,8,10,5)$ dans une base définie (non canonique) de $\mathbb{R}^4$, certains étudiants disent que le vecteur $(15,8,10,5)$ « devient » le vecteur $(4,-10,15,8)$.

La tendance à formuler la réponse à la question posée sous forme d'élément de l'espace servant de cadre à l'énoncé se retrouve aussi lors du travail de tâches de type Base_D (détermination de la base duale d'une base d'un espace vectoriel). La Figure 4-17 nous montre que, dans le cadre de $\mathcal{M}_{2x2}$, après avoir correctement utilisé les relations de dualité liant la base du primal à sa base duale pour déterminer les composantes des différentes formes linéaires de la base duale, un étudiant présente le premier vecteur de la base duale sous forme d'une matrice. Il fera de même avec les autres vecteurs de la base duale dans le cadre matriciel.


Base duale

$y_i(M_j) = \delta_{ij}$

$\to y_1(M_1) = 1 \iff \alpha + 2\beta + 4\delta = 1 \to \beta = \frac{1}{2}$

$y_1(M_2) = 0 \iff 2\alpha - \gamma + 2\delta = 0 \to \gamma = 0$

$y_1(M_3) = 0 \iff \alpha - \delta = 0$

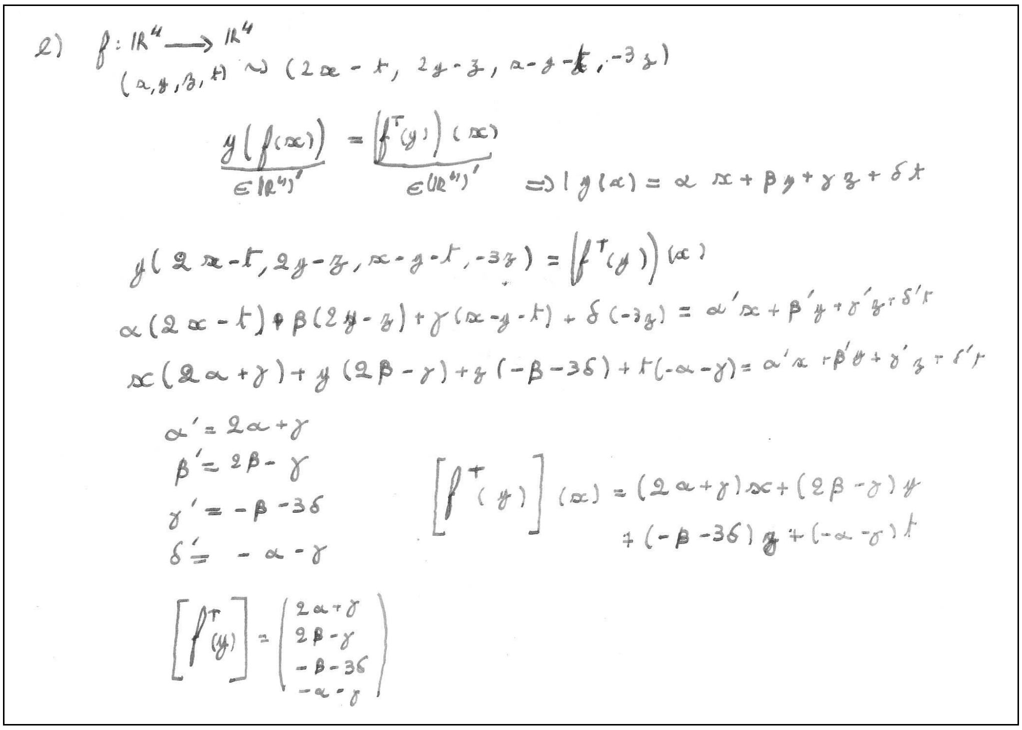
$y_1(M_4) = 0 \iff 2\alpha + 3\delta = 0$

$\to \alpha = \delta = 0$

Premier vecteur de la base duale $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Figure 4-17 : Présentation d'un vecteur de la base duale sous forme de matrice

Citons encore un type de tâches où les deux types d'erreurs développées ici ont constatées : Def_TTransp (définir la transformation transposée d'une transformation linéaire donnée). Nous l'avons vu dans les données chiffrées présentées au Tableau 4-6, seul un étudiant réussit à donner une réponse correcte à l'exercice relevant de ce type de tâches dans le cadre des 4-uplets. La Figure 4-18 nous montre un extrait de sa copie. On peut remarquer qu'après avoir correctement résolu l'exercice, il termine sa réponse en identifiant $f^t(y)$ à un 4-uplet contenant ses coordonnées dans la base canonique duale, sans mentionner cependant qu'il s'agit de coordonnées et de cette base. Il s'agit là du premier type d'erreur relevé dans cette section. Cette confusion étant habituelle (mais justifiable !) auprès des mathématiciens professionnels, nous avons donc jugé que l'exercice était correctement réussi (bien que quelques erreurs de précision subsistent dans l'écriture de la résolution, comme par exemple $y(f(x)) \in \mathbb{R}^{4}$'). La Figure 4-19 nous montre un extrait de la copie de ce même étudiant résolvant l'exercice relevant du même type de tâches (Def_TTransp) dans le cadre matriciel. Cet étudiant, ayant remarqué l'analogie entre les énoncés des deux questions du questionnaire, n'effectue plus de calculs pour établir la transposée, mais présente la transposée de l'application donnée sous forme de matrice. La réponse donnée est donc effectivement erronée. Il s'agit là du deuxième type d'erreur présenté dans cette section.



2) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x, y, z, t) \mapsto (2x - t, 2y - z, x - y - t, -3z)$

$$\underbrace{y(f(x))}_{\in (\mathbb{R}^4)'} = \underbrace{(f^T(y))(x)}_{\in (\mathbb{R}^4)'} \Rightarrow | \; y(x) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t$$

$$y(2x - t, 2y - z, x - y - t, -3z) = (f^T(y))(x)$$

$$\alpha(2x - t) + \beta(2y - z) + \gamma(x - y - t) + \delta(-3z) = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' t$$

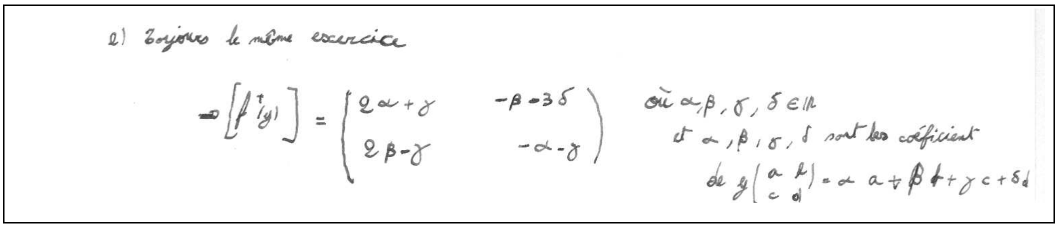
$$x(2\alpha + \gamma) + y(2\beta - \gamma) + z(-\beta - 3\delta) + t(-\alpha - \gamma) = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' t$$

$$\alpha' = 2\alpha + \gamma$$
$$\beta' = 2\beta - \gamma$$
$$\gamma' = -\beta - 3\delta$$
$$\delta' = -\alpha - \gamma$$

$$[f^T(y)](x) = (2\alpha + \gamma)x + (2\beta - \gamma)y + (-\beta - 3\delta)z + (-\alpha - \gamma)t$$

$$[f^T(y)] = \begin{pmatrix} 2\alpha + \gamma \\ 2\beta - \gamma \\ -\beta - 3\delta \\ -\alpha - \gamma \end{pmatrix}$$

Figure 4-18 : Résolution d'un exercice relevant du type de tâches Def_TTransp, dans le cadre de $\mathbb{R}^4$



2) Toujours le même exercice

$$\Rightarrow [f^T(y)] = \begin{pmatrix} 2\alpha + \gamma & -\beta - 3\delta \\ 2\beta - \gamma & -\alpha - \gamma \end{pmatrix}$$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les coéficient de $y\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$

Figure 4-19 : Résolution d'un exercice relevant du type de tâches Def_TTransp, dans le cadre des matrices M_{2x2}

Difficultés propres à la dualité

On peut aussi dégager des difficultés propres à la dualité, souvent liées au caractère très abstrait des objets utilisés. Ce qui nous mènera naturellement à la section suivante traitant de la transition « concret-abstrait » (Winsløw 2008).

La définition de la transformation transposée peut illustrer nos propos puisqu'il s'agit d'une transformation[50] définie sur un espace vectoriel dont les éléments sont des formes linéaires.

Ainsi, lors de la résolution d'un exercice correspondant au type de tâches Def_TTransp, dans le cadre des 4-uplets, trois étudiants confondent la transformation transposée avec la transformation réciproque. Il est clair que pour eux « transformation » prime sur « transposée ». La Figure 4-20 nous montre à titre d'illustration un extrait de la copie d'un de ces étudiants.

[50] Rappelons qu'une *transformation* linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie *E* est une application linéaire de *E* vers *E*. Le cours d'algèbre linéaire présenté aux étudiants ayant répondu à l'enquête ne présente l'*application* transposée que dans le cas particulier d'une *transformation* transposée.

e) $(2x-t, 2y-z, x-y-t, -3z) = f(x,y,z,t)$

Si $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $\qquad$ $f^T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$x \rightsquigarrow f(x)$ $\qquad$ $f(x) \rightsquigarrow x$.

Figure 4-20 : Confusion entre transformation transposée et transformation réciproque

Remarquons au passage qu'aucun étudiant ne fait mention de la transformation adjointe qui est pourtant introduite dans le cours à partir de la fonction « outil-analogie » de la transposée (voir chapitre 3, §1.1).

On peut aussi constater que parmi les 17 étudiants essayant de résoudre la question posée dans le cadre de $\mathbb{R}^4$, 11 étudiants (64,7%) essayent de travailler avec la transformation donnée, alors que les autres se contentent de donner la définition théorique de la transposée ou encore une explication sur ce qu'ils pensent que devrait être la transposée, sans cependant essayer de résoudre effectivement la tâche proposée. Pour ces étudiants, la transposée ne fait partie que du monde abstrait, et ils n'arrivent pas à la mobiliser dans un cadre contextualisé.

Dans le cadre des matrices carrées de taille 2x2, on retrouve pratiquement cette même proportion (66,6%) d'étudiants travaillant avec la transformation donnée parmi les 9 étudiants essayant de solutionner la question correspondant au type de tâches Def_TTransp. Mais dans ce cadre, les réponses sont plus variées car les étudiants associent le type de tâches proposé à une notion abordée dans l'institution enseignement secondaire en Belgique : la matrice transposée. Par exemple, pour résoudre un exercice relevant du type de tâches Def_TTransp *dans le cadre matriciel*, certains étudiants reprennent tout simplement la matrice qui leur est donnée dans l'énoncé et la transposent. Une étudiante dit qu'elle connaît la transposée d'une matrice, mais « pas ça », en parlant de l'application transposée : la notion de matrice prime sur la notion d'application lorsque la transposée est invoquée. Ce fait est encore illustré à la Figure 4-21 où, dans le cadre des 4-uplets, un étudiant calcule tout d'abord la matrice associée à la transformation donnée dans l'énoncé (par rapport à la base canonique) ; puis transpose cette matrice et considère ensuite la matrice ainsi obtenue comme étant la matrice de la transformation transposée (toujours par rapport à la base canonique) ; il convertit ensuite le registre matriciel en registre analytique. Cette démarche se retrouve encore dans la rédaction d'un travail de groupe, où les étudiants peinent toujours à établir correctement la transposée d'une transformation linéaire donnée.

e) Transformation transposée (les lignes deviennent les colonnes

$f(x,y,z,t) = (2x-t, 2y-z, x-y-t, -3z)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$f^T(x,y,z,t) = (2x+z, 2y-z, -y-3t, -x-z)$

Figure 4-21 : Association naturelle des matrices à la notion de transposée

On peut donc faire l'hypothèse que les conceptions des étudiants concernant la transposée sont basées sur les matrices, puisqu'ils ont pour la première fois rencontré l'emploi mathématique de cet adjectif dans ce contexte.

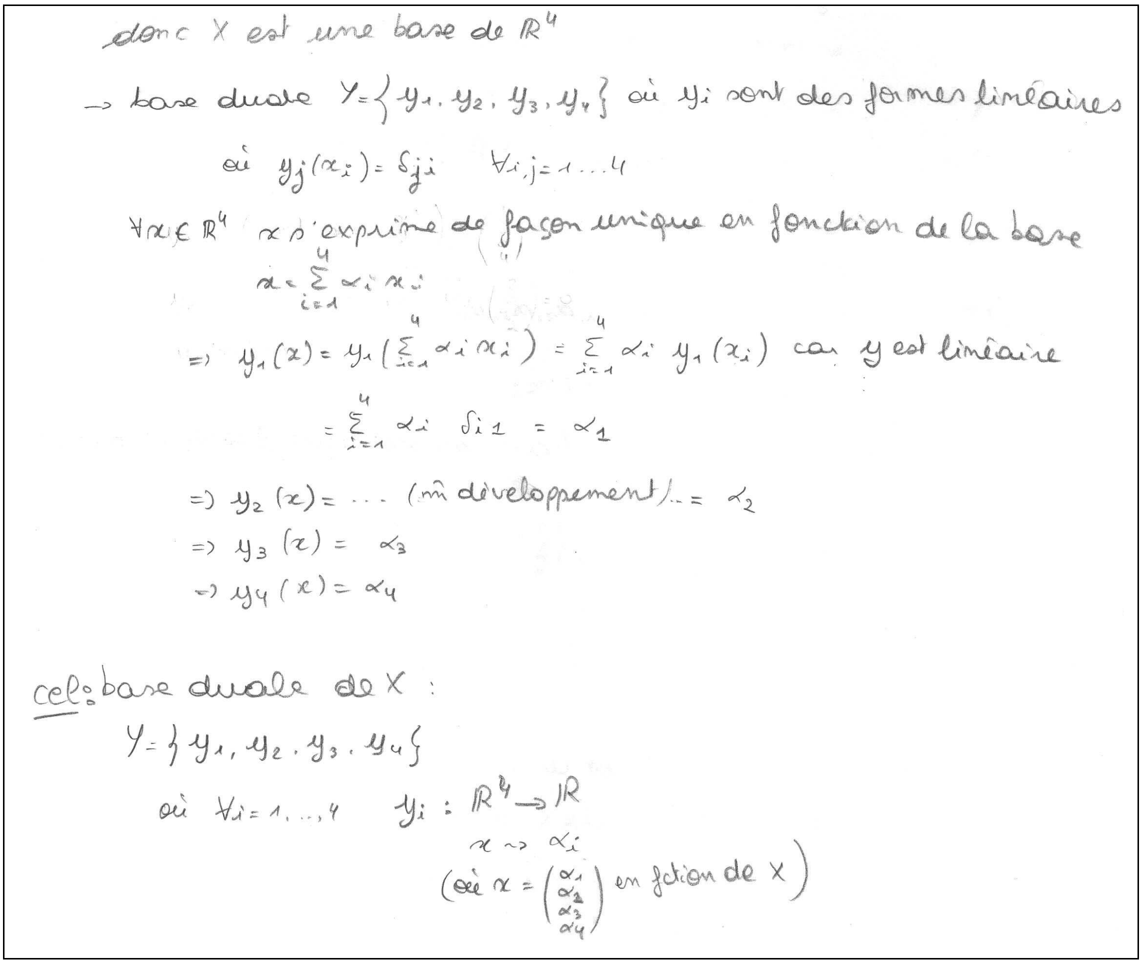
Transition « concret-abstrait »

Les difficultés propres à la dualité présentées dans la section précédente nous permettent d'illustrer ce que Winsløw appelle la transition « concret-abstrait », qui correspond au second type de transition décrit au chapitre 1.

D'après Winsløw, dans l'institution secondaire, c'est essentiellement le bloc « practico-technique » des praxéologies qui est travaillé. Ceci coïncide avec ce que l'on peut constater lorsqu'on analyse les réponses des étudiants auxquels on demande, dans le travail de groupe, s'il y a, selon eux, un lien entre les deux premières parties (cadre de $\mathbb{R}^4$ et cadre matriciel). Les étudiants se concentrent sur la partie practico-technique des praxéologies décrites par Chevallard (2007), et délaissent généralement le bloc technologico-théorique. En effet, des étudiants répondent que « les deux exercices représentent les mêmes transformations dans deux espaces vectoriels fort semblables » et que « la question 2 est exactement la même que la question 1, il n'y a que leur représentation qui diffère ». En utilisant le terme « semblables », les étudiants n'identifient pas les espaces vectoriels, mais bien les éléments constituant les vecteurs de chacun de ces deux espaces. Quoi que pour eux, le terme vecteur est réservé aux éléments de $\mathbb{R}^4$, et le terme matrice est utilisé pour les éléments de $\mathcal{M}_{2x2}$. Les étudiants constatent que seule la « représentation diffère ». On peut supposer qu'en écrivant cela, les étudiants pensent à appliquer identiquement des techniques de calculs (calcul de base duale, etc.) aux différents énoncés proposés.

Certains étudiants sont plus nuancés et parlent d' « énoncés très semblables » mais d' « espaces vectoriels différents ». Après avoir remarqué qu'ils avaient même dimension, ils font appel à la théorie pour citer un isomorphisme entre ces deux espaces. Ils concluent en disant qu' « on trouve les mêmes solutions ». Ils retombent alors dans le bloc practico-technique : ce sont, selon eux, les valeurs numériques apparaissant dans la solution qui sont importantes. Ils ne citent pas l'isomorphisme utilisé pour justifier cette pratique.

Dans l'institution université, le bloc technologico-théorique prend plus d'importance. Il s'agit là d'une première transition. Certains étudiants ont déjà opéré des changements en lien avec cette évolution. Ainsi par exemple, alors que les exercices correspondant aux types de tâches Exemp_FL et ExpGen_FL ne demandaient a priori pas de justifications, une étudiante justifie explicitement, dans sa réponse au questionnaire, à la fois le fait que l'exemple fourni est une forme et que la linéarité est vérifiée. Lors de sa réponse à l'exercice relevant du sous-type de tâche Base_D dans le cadre de $\mathbb{R}^4$, alors qu'il s'agit de calculer la base duale d'une base donnée, cette même étudiante reste dans le cadre générique (restreint à la dimension 4) et démontre le fait que le $i^{ème}$ vecteur de la base duale d'une base B appliqué à un vecteur quelconque de l'espace de départ donne la $i^{ème}$ coordonnée de ce vecteur dans la base B. L'étudiante ne se rend malheureusement pas compte du résultat qu'elle a découvert et croit tout simplement avoir trouvé la base duale. La Figure 4-22 expose son raisonnement.



donc X est une base de $\mathbb{R}^4$

→ base duale $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ où y_i sont des formes linéaires

où $y_j(x_i) = \delta_{ji} \quad \forall i,j = 1 \ldots 4$

$\forall x \in \mathbb{R}^4$ x s'exprime de façon unique en fonction de la base

$x = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i x_i$

$\Rightarrow y_1(x) = y_1\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \, y_1(x_i)$ car y est linéaire

$= \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \, \delta_{i1} = \alpha_1$

$\Rightarrow y_2(x) = \ldots$ (m̂ développement) $\ldots = \alpha_2$

$\Rightarrow y_3(x) = \alpha_3$

$\Rightarrow y_4(x) = \alpha_4$

cel° base duale de X :

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

où $\forall i = 1, \ldots, 4 \quad y_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$x \leadsto \alpha_i$

(où $x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ en fction de X)

Figure 4-22 : Travail du bloc technologico-théorique, sans articulation avec le bloc practico-technique

On voit clairement dans cette figure que l'étudiante manipule des cas génériques (x_i, y_i, α_i) et se place donc uniquement dans le bloc technologico-théorique, au point tel qu'elle néglige entièrement la tâche particulière qu'il lui était donné d'accomplir, à savoir d'établir la base duale d'une base bien particulière de $\mathbb{R}^4$. Une interprétation possible de cette constatation est que cette étudiante, se rendant compte de l'importance donnée au bloc théorique dans la nouvelle institution, se focalise sur ce bloc théorique et oublie l'articulation essentielle existant entre le bloc pratique et le bloc théorique d'une praxéologie complète.

Une deuxième transition apparaît lorsque les éléments constituant le bloc technologico-théorique d'une praxéologie deviennent des éléments sur lesquels vont s'effectuer des calculs et auxquels des techniques vont être appliquées. Ces éléments constituent alors le bloc practico-technique de nouvelles praxéologies. Ce phénomène se produit lorsque l'on travaille avec la dualité en tant qu'objet : des formes linéaires sont considérées comme des vecteurs car le dual qui en constitue l'ensemble est un espace vectoriel. Les théories développées sur le dual justifient les techniques appliquées aux formes linéaires, positionnant ainsi le dual dans un bloc technologico-théorique. Mais lorsque l'on considère la transformation transposée, le dual glisse du bloc technologico-théorique d'une praxéologie précédente pour occuper le bloc practico-technique d'une nouvelle praxéologie, le dual étant alors considéré comme l'espace de départ de la transformation transposée. D'après Winsløw (2008), cette deuxième transition est encore plus difficile que la première pour les étudiants. Nous pouvons en effet constater au vu des réponses apportées par les étudiants aux exercices se rapportant aux types de tâches Def_TTransp que les étudiants éprouvent des difficultés lorsque l'on aborde cette deuxième transition : ils éprouvent par exemple des difficultés à définir correctement l'espace de départ de la transformation transposée (même après avoir travaillé en groupe sur le sujet), et reprennent alors l'espace vectoriel primal comme espace de départ et d'arrivée pour la transformation transposée.

Toujours concernant le type de tâches Def_TTransp, lorsque les étudiants écrivent correctement les espaces de départ et d'arrivée, ils éprouvent encore des difficultés à manipuler les éléments du dual. La Figure 4-23, extraite de la rédaction d'un travail de groupe, illustre nos propos :

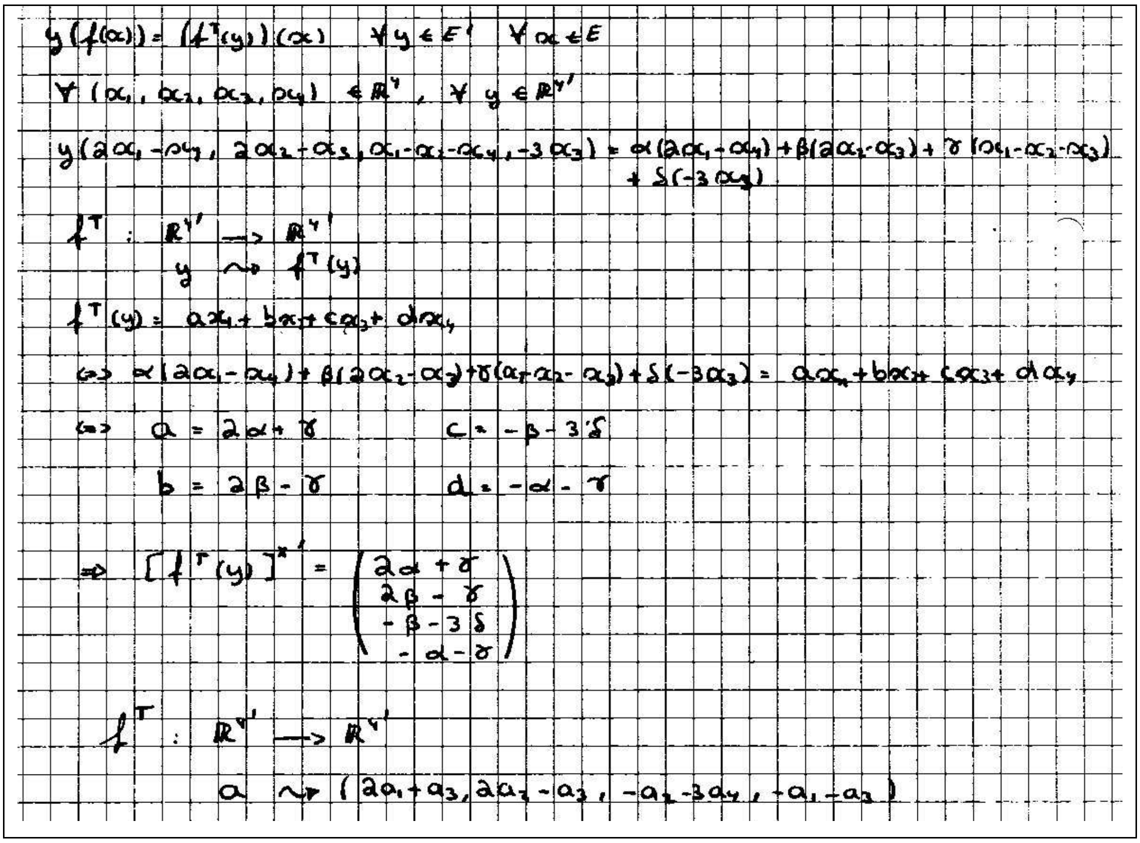


Figure 4-23 : Difficulté à manipuler le dual comme un élément du bloc practico-technique

Dans la première ligne de la Figure 4-23, les étudiants reprennent la définition de la transformation transposée qui a été donnée au cours théorique (l'espace vectoriel considéré est noté E à la place de $\mathbb{R}^4$). Dans la deuxième et la troisième ligne, les étudiants tentent de contextualiser la définition donnée à $\mathbb{R}^4$. On peut donc considérer que le dual y fait partie d'un bloc théorique. Mais lorsque, dans les deux lignes qui suivent, le dual intervient comme un composant de la transformation transposée à déterminer (l'espace de départ et d'arrivée), et fait donc partie d'un bloc practico-technique, les étudiants sont perdus et leurs notations n'ont plus vraiment de sens : ils écrivent $f^t(y) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$, alors que $f^t(y)$ est un élément du dual de $\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire une forme linéaire, dont l'expression analytique complète devrait ressembler à quelque chose comme :

$$\begin{array}{llll} f^t(y): & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4) & & \left(f^t(y)\right)(x_1, x_2, x_3, x_4) = \ldots \end{array} .$$

Le fait d'avoir introduit des x_i dans l'expression de $f^t(y)$ permet aux étudiants d'utiliser une expression en x_i précédemment obtenue afin d'obtenir l'égalité présentée en 6ème ligne de la Figure 4-23. Ils peuvent ainsi utiliser une technique apprise en séance d'exercices, à savoir égaler les coefficients des x_i, ce qui leur permet de dégager les expressions de a,b,c,d en fonction de $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. En supposant que X' soit la base canonique du dual de $\mathbb{R}^4$, et que $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ soient les coordonnées dans cette base d'une forme linéaire quelconque y, on peut considérer comme correcte la réponse donnée par les étudiants quand ils décrivent les coordonnées de $f^t(y)$ dans la base X'. Mais on peut constater, dans la dernière ligne de la Figure 4-23 que, lorsque les étudiants réinvestissent le dual dans leur réponse comme un élément d'un bloc pratique, l'écriture des étudiants devient de nouveau incohérente, étant donné qu'ils parlent maintenant du « a » comme un élément du dual, et qu'ils introduisent des a_i sans les avoir définis. On peut donc se rendre compte que la deuxième transition à laquelle les étudiants sont confrontés en considérant le dual n'est vraiment pas évidente.

Remarquons que, lorsqu'on demande aux étudiants, dans le travail de groupe, si l'on peut affirmer que $(f^t)^t = f$, on remarque que la question est très bien réussie par les quatre groupes. Pour résoudre une tâche du type Prop_TTrans présentée dans un cadre générique, les étudiants optent, à juste titre, pour le bloc technologico-théorique. Pour la transposée de la transposée, les étudiants acceptent spontanément de chercher la solution dans la théorie. Parfois, faire le lien entre la théorie et les exemples est plus difficile que de rester à l'intérieur de la théorie.

3.2. Résultats concernant les étudiants de master

Sur les 30 étudiants à qui nous avons distribué le questionnaire « master », seuls 12 (40%) nous ont répondu. Ils se répartissent équitablement entre la première année et la deuxième année de Master. Précisons que ces étudiants sont répartis, dans leurs résultats, sur toute l'échelle de la promotion. Nous avons interrogé oralement quelques étudiants de master qui ne nous avaient pas rendu le questionnaire, et les réponses étaient toujours les mêmes : ils ne se souvenaient plus de la dualité et ne jugeaient donc pas utile de répondre au questionnaire sans aller revoir leurs notes de première année, chose pour laquelle ils n'avaient pas envie de prendre le temps par ailleurs. Les étudiants interrogés n'ayant pas répondu au questionnaire ont cependant précisé qu'ils pourraient expliquer la notion de base. Il nous semble donc que les résultats issus de l'analyse des 12 questionnaires reçus en retour peuvent se généraliser à l'ensemble des étudiants de Master.

Vu le petit nombre de formulaires reçus en retour, nous ne présentons pas de résultats chiffrés globaux, mais nous présentons les grandes tendances qui peuvent se dégager de l'analyse du questionnaire « master ».

Catalogue d'espaces vectoriels insuffisants

Quand on demande aux étudiants de master de donner un exemple d'espace vectoriel qui ne soit pas du type de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$, trois étudiants disent qu'ils n'en ont pas d'idée. Un de ces étudiants précise même qu' « on n'utilise plus ce genre de chose après la 1ère bac »[51].

[51] la « 1ère bac » étant la première année d'université.

Nous avons classé les exemples d'espaces vectoriels donnés par les neuf autres étudiants de master en quatre catégories, reprises dans le Tableau 4-7. Nous avons placé la réponse de l'étudiant 1 (K^n) dans la catégorie des espaces algébriques car cet étudiant reste dans un discours théorique dans sa réponse à la question concernée (question 7 du questionnaire « master »), et la réponse de l'étudiant 3 (E^2) a été classée dans les espaces géométriques car les vecteurs que cet étudiant manipule dans la suite de sa réponse à la question sont du genre $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. L'étudiant 8 (brillant !) nous dit qu'il n'utilise que les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$, puis il précise : « ce sont néanmoins des éléments théoriques que j'avais alors compris et je n'aurais pas de difficulté de donner une base d'un E.V. après révision ».

	Espace algébrique	**Espace géométrique**	**Espace polynomial**	**Espace fonctionnel**
Etudiant 1	K^n			
Etudiant 2		$\mathbb{R}^2$		
Etudiant 3		E^2		
Etudiant 4			de degré 1	
Etudiant 5			de degré au plus 2	
Etudiant 6				$L^2([a,b])$ espace des fonctions de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$
Etudiant 7				$L^2(0,1)$
Etudiant 8	$\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$			
Etudiant 9			de degré *n*	
TOTAL	1	2	3	2

Tableau 4-7 : Espaces vectoriels proposés par les étudiants de Master (Q.7 du questionnaire)

On peut émettre l'hypothèse que les étudiants ayant donné des espaces algébriques ou géométriques ne disposent pas d'un catalogue varié d'espaces vectoriels, et que cette notion, voire d'autres notions d'algèbre linéaire, restent pour eux des notions théoriques, non utilisables en dehors de l'algèbre ou de la géométrie. Les étudiants 1, 2 et 3, en ne respectant pas les consignes données (espaces vectoriels autres que $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$) renforcent cette hypothèse. Remarquons que l'étudiant 8 a quant à lui expliqué sa réponse.

Sous cette hypothèse, on peut donc affirmer que 50% des étudiants de master ayant répondu au questionnaire n'ont pas à leur disposition un éventail d'exemples d'espaces vectoriels. Nous gardons en mémoire cette constatation que nous exploitons dans les propositions de dispositifs d'enseignements.

Notion de base très bien maîtrisée

Un premier fait qui peut être établi concernant la notion de base, c'est que celle-ci est connue de tous les étudiants ayant répondu au questionnaire « master ». L'explication donnée lors des réponses à la première question du questionnaire pour la notion de base l'a toujours été dans le langage de la langue naturelle. Cette explication peut être « pratique » (Figure 4-24), c'est-à-dire qu'elle permet facilement de vérifier qu'un ensemble d'éléments constitue ou pas une base, ou être « conceptuelle » (Figure 4-25), c'est-à-dire qu'elle permet de décrire le concept de la notion considérée, sans nécessairement consister en un outil technique permettant de vérifier si un ensemble d'éléments constitue une base. Enfin, une explication peut être à la fois « pratique » et « conceptuelle » (Figure 4-26).

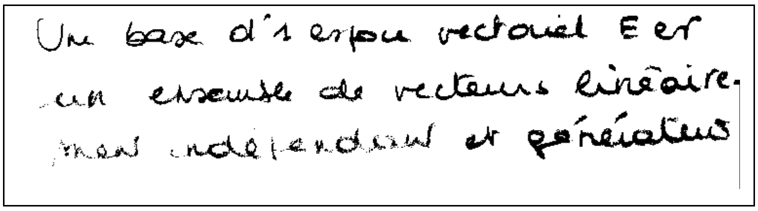

Un base d'1 espace vectoriel E est
un ensemble de vecteurs linéaire-
ment indépendant et générateurs

Figure 4-24 : Exemple d'explication de la notion de base qualifiée de "pratique"

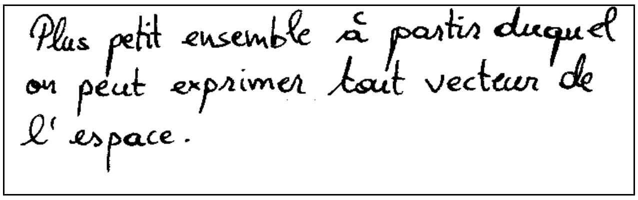

Plus petit ensemble à partir duquel
on peut exprimer tout vecteur de
l'espace.

Figure 4-25 : Exemple d'explication de la notion de base qualifiée de "conceptuelle"

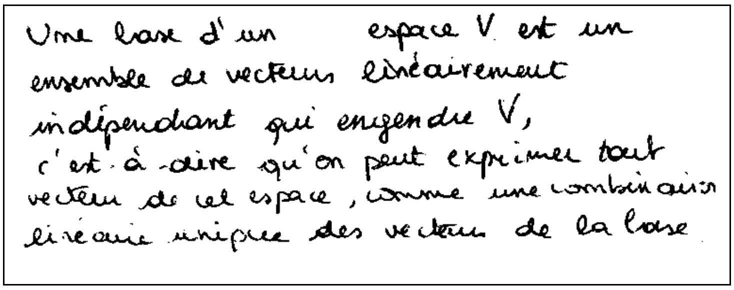

Une base d'un espace V est un
ensemble de vecteurs linéairement
indépendant qui engendre V,
c'est-à-dire qu'on peut exprimer tout
vecteur de cet espace, comme une combinaison
linéaire unique des vecteurs de la base

Figure 4-26 : Exemple d'explication de la notion de base qualifiée de "pratique" et de "conceptuelle"

De même, les douze étudiants ayant répondu au questionnaire « master » donnent correctement une base de $\mathbb{R}^4$, la base canonique en l'occurrence. Dans le contexte des espaces vectoriels proposés par les étudiants à la question 7, huit des neufs étudiants ayant proposé un espace vectoriel (voir Tableau 4-7) en définissent correctement une base.

En ce qui concerne les contextes d'utilisation de la notion de base, sept étudiants ne citent que le cours d'algèbre linéaire ; cinq étudiants citent aussi la géométrie (analytique) en plus de l'algèbre linéaire, et parmi ces derniers, trois étudiants donnent encore au moins un autre contexte d'utilisation (analyse, géométrie différentielle, géométrie symplectique, topologie, mesure et intégration)

Notions de forme et d'application linéaire maîtrisées

L'unanimité des résultats concernant le concept de *base* ne se retrouve pas lorsqu'on aborde la notion de *forme linéaire,* bien que huit étudiants sur 12 (66,7%) en donnent une définition complète, un étudiant en donne une définition presque correcte (voir Figure 4-27 : $a, b \in E$, $x, y \in K$), deux étudiants donnent la définition d'une application linéaire, et un étudiant dit simplement qu' « une forme linéaire est une fonction à valeur réelle ».

Application partant d'un espace vectoriel et arrivant sur un corps K, dont on peut séparer les arguments.
ex : $f(ax+by) = a f(x) + b f(y)$,
où $a, b \in E$, $x, y \in K$.

Figure 4-27 : Définition "presque correcte" de la notion de forme linéaire

Lorsqu'il s'agit de donner un exemple d'application linéaire sur $\mathbb{R}^4$, huit étudiants y parviennent parfaitement, deux parlent de produit scalaire, un étudiant donne une réponse surprenante (Figure 4-28), et le dernier dit qu'il devrait reprendre son cours d'exercices d'algèbre linéaire pour répondre à la question. Parmi les étudiants ayant donné un exemple correct d'application linéaire, trois ont donné une forme linéaire et un a donné l'identité.

Si on prend 1 application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$
tq $f(x) = \alpha e$ où e est 1 base de $\mathbb{R}^4$

Figure 4-28 : Exemple erroné d'application linéaire sur $\mathbb{R}^4$

Concernant les contextes d'utilisation de la notion de forme linéaire, dix étudiants citent uniquement le cours d'algèbre linéaire, un autre y ajoute la géométrie analytique, alors que le dernier cite l'analyse et la géométrie différentielle.

Notion de dual

Lorsqu'on leur demande d'expliquer le dual, dix des douze étudiants de master ayant répondu au questionnaire donnent une explication que l'on peut qualifier de correcte, même si la plupart préfèrent parler d'*ensemble* de formes linéaires plutôt que d'*espace vectoriel*. Un étudiant nous avoue qu'il s'agit d'une « notion incomprise lors de la BAC1 et non claire encore maintenant ». Pour l'expliquer à un jeune étudiant (comme demandé dans le questionnaire), cet étudiant de master dit qu'il repartirait de la notion de forme linéaire et propose le schéma repris à la Figure 4-29, avec un point de vue « géométrique pour ceux qui ont plus une compréhension visuelle ». Cet étudiant propose d' « utiliser l'idée de la dualité dans un plan géométrique (projective)[52] ».Un dernier étudiant se « rappelle juste d'une illustration avec des tomates » que le professeur avait donnée au cours théorique, mais cet étudiant précise : « Maintenant, quant à me rappeler de sa recette… ».

[52] Cet étudiant fait référence explicitement à un article de Wikipédia sur la dualité en géométrie projective. Il s'était en effet documenté afin de pouvoir répondre au mieux à « un élève de 1ère année qui n'a pas bien compris » les notions proposées dans le questionnaire.

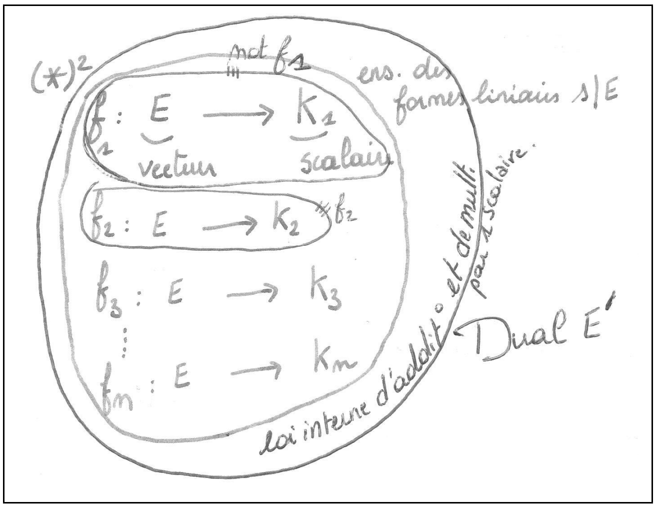
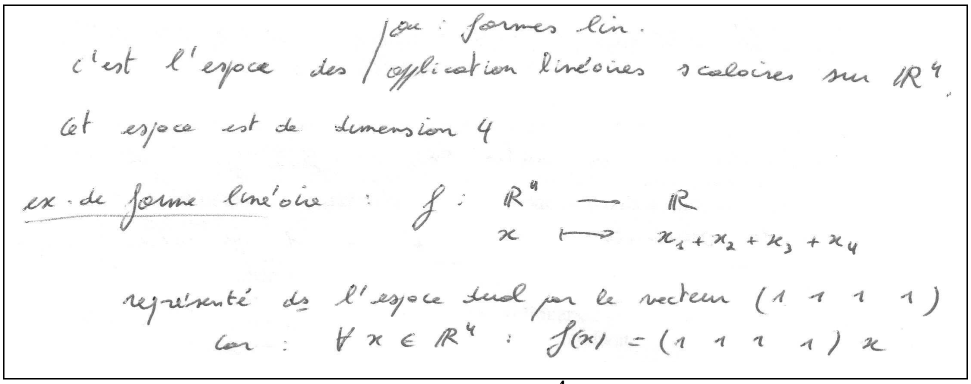


Figure 4-29 : Schéma d'un étudiant expliquant le dual

Remarquons que seuls deux étudiants mentionnent des lois (addition et multiplication par un scalaire) pour parler du dual, les autres ne parlant jamais que d'*ensembles*.

Sept étudiants répondent correctement lorsqu'on leur demande de définir le dual de $\mathbb{R}^4$. Tous le font en langage naturel (français). Deux étudiants donnent des précisions en utilisant des symboles mathématiques (Figure 4-30). L'idée de représentation d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$ par un vecteur à quatre composantes présentée dans la Figure 4-30 est également reprise par un autre étudiant qui dit, pour définir le dual de $\mathbb{R}^4$: « ce sont des vecteurs à 4 composantes que l'on applique aux vecteurs de $\mathbb{R}^4$ (via un produit scalaire) pour obtenir un élément de $\mathbb{R}$. »


c'est l'espace des / ou : formes lin. / application linéaires scalaires sur $\mathbb{R}^4$

Cet espace est de dimension 4

ex. de forme linéaire : $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

représenté ds l'espace dual par le vecteur $(1\ 1\ 1\ 1)$

car : $\forall x \in \mathbb{R}^4$: $f(x) = (1\ 1\ 1\ 1)\, x$

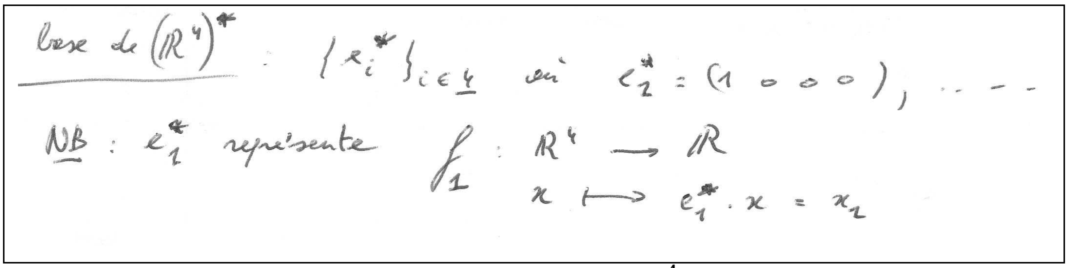
Figure 4-30 : Définition du dual de $\mathbb{R}^4$ donnée par un étudiant

Notion de base duale

Lorsqu'on aborde la notion de base duale (question 1 du questionnaire « master »), six étudiants répondent qu'il s'agit d'une (ou de la) base du dual, mais sans donner de relation avec une éventuelle base de l'espace primal. Remarquons que rien dans la question posée ne le suggérait. Un étudiant fait la relation avec une base du primal dans sa réponse : « base mais pour le dual, obtenu en prenant 1 base du primal, en appliquant des formes linéaires (avec prop. spécifique) ». Quatre étudiants donnent correctement la définition de base duale (d'une base du primal) ; et un étudiant dit erronément qu'il s'agit de l' « ensemble des formes linéaires de l'espace dual » !

Si le concept théorique de base duale n'effraie pas les étudiants de master (même si plusieurs restent très imprécis à ce sujet), les choses deviennent moins évidentes lorsqu'on leur demande de donner une base du dual d'un espace vectoriel précis :

- Quand on contextualise à $\mathbb{R}^4$ (question 6 du questionnaire « master »), sept étudiants (58%) ne savent pas du tout que répondre. Sur les cinq autres, seul un étudiant donne une réponse que l'on peut qualifier de correcte, en utilisant l'isomorphisme entre $\mathbb{R}^4$ et son dual (Figure 4-31) ; un étudiant se contente de donner la définition théorique (qu'il a été revoir dans son cours d'algèbre de première année) ; un autre donne une réponse partielle en se rappelant vaguement la technique (Chevallard 2007) utilisée pour l'exercice proposé (Figure 4-32) ; deux étudiants répondent tout simplement que c'est la même chose que pour $\mathbb{R}^4$ (Figure 4-33).


base de $(\mathbb{R}^4)^*$: $\{e_i^*\}_{i \in 4}$ où $e_1^* = (1\ 0\ 0\ 0)$, ...

NB : e_1^* représente $f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e_1^* . x = x_1$

Figure 4-31 : Exemple d'une base du dual de $\mathbb{R}^4$ donné par un étudiant

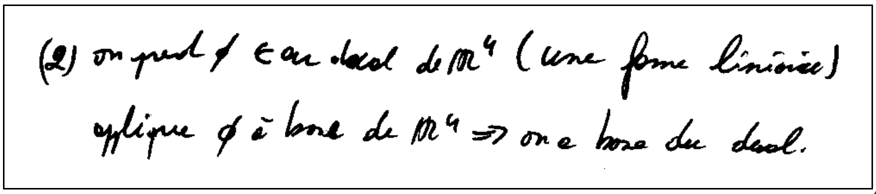

(2) on peut f ∈ au dual de $\mathbb{R}^4$ (une forme linéaire) explique f à base de $\mathbb{R}^4$ ⇒ on a base du dual.

Figure 4-32 : Réponse partielle d'un étudiant à "donner une base du dual de $\mathbb{R}^4$ "

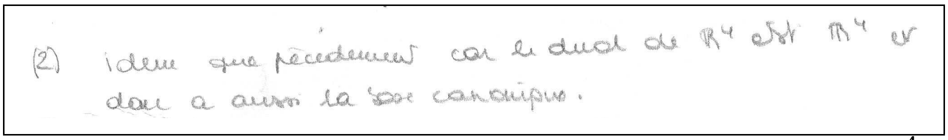

(2) idem que précédemment car le dual de $\mathbb{R}^4$ est $\mathbb{R}^4$ et donc a aussi la base canonique.

Figure 4-33 : Réponse erronée d'un étudiant à "donner une base du dual de $\mathbb{R}^4$"

- Quand il est demandé aux étudiants de choisir un espace vectoriel et d'en donner une base du dual (question 7 du questionnaire « master »), la situation se détériore encore : aucun étudiant ne donne une réponse correcte. La plupart n'essaient même pas de répondre ; un étudiant explique qu'il ne sait plus comment faire car il ne se souvient plus de la manière de faire les calculs (bloc practico-technique).

  Seuls deux étudiants tentent une réponse pour la base duale à la question 7 : l'étudiant ayant proposé l'espace K^n dit que la base du dual est la même que celle donnée pour K^n (base canonique) ; l'étudiant ayant proposé l'espace vectoriel E^2 (qu'il assimile dans la suite de sa réponse à $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$) donne une réponse sensée (Figure 4-34), mais propose comme éléments de la base duale des éléments de « E^2 » (et non de E^{2}') en oubliant complètement qu'il s'agit de formes linéaires, ou en ne citant pas l'isomorphisme liant un espace vectoriel de dimension *n* (de champ K) à K^n .

  Remarquons que les éléments donnés dans sa réponse (les composantes des « vecteurs » de la base duale sont les *inverses* des composantes des vecteurs de la base du primal quand il s'agit de la base canonique ou d'un de ses « multiples ») peuvent expliquer en partie la confusion que font certains étudiants de première année entre l'application *inverse* et un thème du secteur dualité, à savoir l'application transposée.

- Espace : E^2
- base : $\{e_1, e_2\}$ où e_1 est de la forme $\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}$
  et e_2 " " " " $\begin{pmatrix}0\\\beta\end{pmatrix}$
  avec $\alpha, \beta \in K$
- base duale : $\{d_1, d_2\}$ où d_1 est de la forme $\begin{pmatrix}1/\alpha\\0\end{pmatrix}$
  et d_2 " " " " $\begin{pmatrix}0\\1/\beta\end{pmatrix}$
- appl. linéaire : $f : E^2 \to E^2$
  $(e_1, e_2) \rightsquigarrow f(e_1, e_2) = (2e_1 + e_2, e_2)$
- appl. transposée : $f^T : E^2 \to E^2$
  $(d_1, d_2) \rightsquigarrow f^T(d_1, d_2) = (2d_1, d_1 + d_2)$

Figure 4-34 : Réponse d'un étudiant à la question 7 du questionnaire "master"

Notion de transposée

Remarquons que onze des douze étudiants (92%) ont rencontré la notion de *matrice* transposée dans l'enseignement secondaire, dans le cadre du calcul matriciel. Deux étudiants mentionnent également que, dans cette institution, le calcul matriciel a été exploité dans la recherche de solution(s) de systèmes d'équations linéaires.

Alors que les réponses des étudiants sont très variées quand il s'agit d'expliquer le lien entre application transposée et matrice transposée, la majorité des étudiants (sept sur douze) ne savent rien dire quand on leur demande à quoi peut servir la transposée et les circonstances dans lesquelles elle intervient. Cette constatation peut s'expliquer par le fait que dans la carte conceptuelle institutionnelle présentant les notions de dualité enseignée en première année aux mathématiciens et physiciens à l'université de Namur (Figure 4-2, page 93), la transformation transposée se trouve « en bout de course » : elle n'intervient pas directement dans d'autres notions d'algèbre. Elle sera utilisée comme outil-analogie pour la définition de l'application adjointe dans le chapitre consacré aux espaces métriques. Un étudiant semble se souvenir de ce fait dans la réponse qu'il fait lorsqu'on l'interroge sur l'utilité de l'application transposée (Figure 4-35), mais utilise l'application transposée à la place de l'adjointe en manipulant les « crochets » du produit scalaire.

lorsqu'on travaille avec des produits scalaires, on a
$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^T(y) \rangle$

Figure 4-35 : Evocation du lien entre appl. transposée et produit scalaire (appl. adjointe)

Nous l'avons dit, le lien entre la matrice transposée et l'application transposée a suscité des réponses variées. Neuf étudiants (75%) ont apporté des éléments de réponse à cette question. Parmi ceux-ci, seuls deux parlent de dual ou de base duale (Figure 4-36 et Figure 4-37).

la matrice représente la application transposé
On a 1 application linéaire entre 2 bases, la matrice transposé représente la transposée de l'application par rapport au base dual.

Figure 4-36 : Evocation du lien entre application transposée et base duale

.toute application linéaire peut-être représentée par une matrice et vice-versa.
Si la matrice M représente une certaine application f, alors la matrice M^T représentera l'application transposé f^T.
(La matrice transposée sera écrite par rapport aux bases duales, l'application transposé étant définie sur l'espace dual)

Figure 4-37 : Evocation du lien entre application transposée, dual et bases duales

Dans la Figure 4-37, précisons que l'étudiant a ajouté la dernière phrase (placée entre parenthèses) après avoir consulté son cours d'algèbre de première année.

Quand il s'agit de donner l'application transposée d'une application linéaire définie sur $\mathbb{R}^4$, aucun étudiant ne parle du dual de $\mathbb{R}^4$. Cinq étudiants ne donnent aucune réponse ; trois étudiants donnent des réponses farfelues ; un étudiant ayant considéré comme application linéaire l'identité dit que la transposée est l'identité, mais ne précise rien d'autre ; deux étudiants donnent des réponses sans aucune explication, et définissent l'application transposée comme étant une transformation de $\mathbb{R}^4$ (Figure 4-38) ; enfin, un étudiant établit la transposée de l'application choisie à partir des matrices (Figure 4-39). Les trois derniers étudiants dont nous venons de parler sont les seuls à avoir donné une réponse que l'on pourrait qualifier de correcte à condition de se dire qu'ils ont (implicitement) utilisé l'isomorphisme entre un dual et son primal. Rappelons qu'aucun étudiant de master n'établit que la transposée d'une application est une application définie sur le dual de l'espace vectoriel considéré.

3) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$
$(x,y,z,t) \rightsquigarrow (x+y+z+t,\ x+t,\ y,\ z)$

4) $f^T : \mathbb{R}^4 \rightsquigarrow \mathbb{R}^4$
$(x,y,z,t) \rightsquigarrow (x+y,\ x+z,\ x+t,\ x+y)$

Figure 4-38 : Exemple donné pour une application et sa transposée (cadre de $\mathbb{R}^4$)

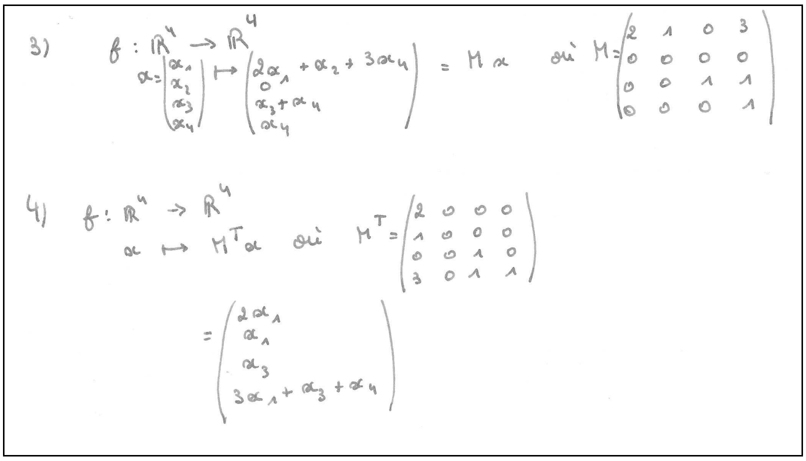


Figure 4-39 : Exemple donné pour une application et sa transposée (cadre de $\mathbb{R}^4$)

Enfin, remarquons qu'à la dernière question du questionnaire « master », lorsqu'on prend comme cadre un espace vectoriel de leur choix, il n'y a plus qu'un seul étudiant qui tente de répondre à la question sur l'application transposée (Figure 4-34). On pourrait de nouveau qualifier sa réponse de correcte à condition de se dire qu'il utilise l'isomorphisme entre un dual et son primal.

On peut conclure que les étudiants de master n'ont que très peu de souvenir de la transposée d'une application linéaire. Ils ne font généralement pas le lien entre la notion de transposée et le dual. Par contre, la notion de transposée est naturellement liée chez eux aux matrices. Les éléments de cette analyse nous poussent à dire qu'il y aurait donc un sens à introduire la notion d'application transposée à partir de la transposée d'une matrice, étant donné que cette dernière notion fait partie du bagage « ancien » d'une grande majorité d'étudiants. Une dialectique ancien-nouveau (Assude & Gelis 2002) pourrait donc s'installer par ce biais. Nous y reviendrons au chapitre 5.

4. Conclusions et perspectives

Nous avons classifié les difficultés apparues lors de l'analyse des réponses des étudiants de première année en trois catégories principales : les difficultés liées à des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, celles qui relèvent de l'algèbre linéaire élémentaire mais deviennent particulièrement sensibles lorsqu'on aborde la dualité, et enfin celles propres à la dualité.

Le cadre théorique proposé par Winsløw (2008) nous a permis d'interpréter les difficultés relevant de la dernière des trois catégories invoquées ci-dessus en termes de transitions : bien que la dualité ne soit pas abordée en tant qu'objet (Douady 1986) dans l'institution enseignement secondaire, nous pouvons quand même parler de transition à son sujet, étant donné que des transitions existent au-delà du simple moment d'entrée à l'université.

En interrogeant les étudiants de master, nous avons pu mettre en lumière que la notion de base (qui est une notion « élémentaire[53] » en algèbre linéaire) est bien maîtrisée par les étudiants en fin de cycle, mais qu'ils ne possèdent pas un grand catalogue d'exemples d'espaces vectoriels. La notion de dual est, semble-t-il, comprise au niveau théorique, mais

[53] Elémentaire, rappelons-le, par rapport à la dualité.

lorsqu'il y a contextualisation, les étudiants de master ont plus de difficultés. Le même commentaire pourrait être fait en ce qui concerne les bases duales.

Pour les étudiants de master, comme pour les étudiants débutants, la notion de transposée est davantage liée à une matrice qu'à une application.

Dans le chapitre qui suit, l'analyse que nous venons de présenter va nous permettre de proposer un dispositif visant l'introduction de certaines notions de dualité en tant qu'objet lors d'un cours d'algèbre linéaire en première année d'université.

Chapitre 5. Dispositifs expérimentaux

Les résultats présentés dans les différents chapitres précédents (travaux didactiques déjà menés en algèbre linéaire, genèse de la dualité, structuration du savoir lié à ce secteur, analyse des difficultés des étudiants lors de son apprentissage) vont être utilisés afin de formuler des propositions concernant l'introduction de la dualité en algèbre linéaire. Dans un premier temps (§ 1), nous formulons des propositions générales pour l'introduction de notions de dualité. Nous décrivons après (§ 2) un dispositif spécifique à la faculté des sciences de l'université de Namur, l'*opération tremplin*, à travers lequel ont pu prendre place certaines propositions d'enseignement formulées en première section. Nous exposons ensuite (§ 3) la manière dont certaines de ces propositions ont été mises en œuvre à l'université de Namur. Enfin (§ 4), nous analysons des données recueillies suite à la mise en place de ces dispositifs.

1. Introduction de la dualité : propositions

Rappelons tout d'abord que la dualité comporte au moins deux aspects, mis en évidence par l'analyse à caractère épistémologique faite au chapitre 2. D'un côté, il y a l'aspect que nous avons qualifié de *naturel*, ancré dans le cadre des systèmes d'équations linéaires, très fortement lié au concept de rang par exemple. Cet aspect est encore présent dans le lien existant entre les équations paramétriques et les équations cartésiennes d'un sous-espace déterminé (chapitre 1, § 3.2.c et d; Alvès-Dias 1998). D'un autre, côté, il y a l'aspect *formel* de la dualité qui considère ce secteur de l'algèbre linéaire comme un objet (Douady 1986), mais qui n'a pu apparaître comme tel qu'après l'introduction d'un formalisme et d'une unification de concepts (notamment par la notion d'espace vectoriel).

Précisons que différentes motivations existent pour incorporer la dualité en tant qu'objet (aspect *formel*) dans un enseignement d'algèbre linéaire. Cela peut aller du besoin de présenter des concepts plus abstraits (en référence à une pensée mathématique avancée[54]), à un besoin de justification formelle de techniques de résolution (voir *les annulateurs*, § 1.2.g), en passant par le besoin de définition formelle de certaines notions (l'application transposée par exemple) ou l'introduction de techniques supplémentaires (finalité outil-résolution) relevant de niveaux de conceptualisation différents (chapitre 1, § 3.2.b ; Robert 1997). De la motivation existante découlera une structuration du savoir à enseigner.

Une proposition d'enseignement de l'algèbre linéaire mettant en œuvre l'aspect naturel de la dualité a été réalisée par Rogalski, s'appuyant entre autres sur des recherches de Dorier (chapitre 1, § 3.2.c, Rogalski 1991, 1994, 1997). De fait, se basant sur des analyses épistémologiques, cet enseignement offre une place centrale à la notion de rang et propose un travail préparatoire à l'introduction de l'algèbre linéaire formelle dans le cadre des systèmes d'équations linéaires et du double point de vue cartésien et paramétrique. Il s'agit donc d'une mise en œuvre de l'aspect naturel de la dualité. Précisons que la proposition d'enseignement expérimentée à Lille n'aborde pas la dualité dans son aspect formel, mais pourrait en constituer une introduction. En effet, l'exploitation de l'aspect naturel de la dualité est une voie d'entrée privilégiée pour l'enseignement de ce secteur sous un aspect formel.

Au niveau des expérimentations dans notre recherche, nous nous sommes concentrée sur l'institution université de Namur (Belgique), et plus particulièrement sur le cours d'algèbre linéaire (Toint 2007) à destination des étudiants qui y sont inscrits en première

[54] Cfr l' « AMT » présentée au chapitre 1, § 1.1.

année mathématique ou physique. L'introduction à la dualité par le biais des systèmes d'équations linéaires ne s'y présentait cependant pas naturellement (voir § 4.2.a). La structuration de la dualité qui est faite dans ce cours d'algèbre linéaire est présentée au chapitre 4, au Tableau 4-1 et à la Figure 4-2 (voir aussi Annexe 5). Le thème des annulateurs, non repris dans la structuration de la dualité présente dans (Toint 2007) ne sera quant à lui que brièvement évoqué dans ce chapitre. Parmi la proposition des *thèmes* du *secteur* dualité (Chevallard 2007) résultant des cadres théoriques adoptés et de l'analyse de manuels que nous avons effectuée (chapitre 1, § 2 ; chapitre 3), nous considérons donc ici pour le *secteur* dualité, les *thèmes* de formes linéaires, d'espace vectoriel dual, de bases duales et d'application transposée. Nous tiendrons donc compte de la structuration du savoir dans l'institution considérée dans la formulation de propositions concernant la dualité (§ 1.2), dont nous explicitons maintenant les objectifs (§ 1.1).

Nous n'avons pas la prétention, dans notre travail de proposer *la* meilleure façon d'introduire ce secteur d'algèbre linéaire, pour autant que l'on puisse supposer que cela existe. Nous formulons ici des propositions, appuyées sur nos analyses épistémologiques, sur les possibilités de structuration du savoir rencontrées dans les analyses de manuels, et sur l'analyse des difficultés des étudiants confrontés à l'enseignement de la dualité. Précisons que les choix proposés sont cadrés par les possibilités envisagées pour l'expérimentation, ce qui implique certaines contraintes.

1.1. Principes généraux pour un enseignement de dualité

Bien entendu (voir chapitre 4, figure 4-2), un enseignement de la dualité en algèbre linéaire (en tant qu'objet) doit impérativement se positionner après qu'aient été présentés au minimum les secteurs :

- d'espaces vectoriels (comprenant les sujets de dépendance linéaire, du caractère générateur, de base, de coordonnées, etc.),
- d'applications linéaires (comprenant les sujets de noyau, d'image, de rang, de matrice, etc.).

Nous supposons aussi que les étudiants savent lire et interpréter les symboles mathématiques élémentaires, comme « $\in$ », « $\{\quad\}$ », « $\forall$ », « $\exists$ », etc.

Est également considérée comme prérequis une connaissance des équations linéaires, que ce soit par le biais des représentations de droites et de plans ou par le biais de la résolution des systèmes d'équations linéaires. Ces matières sont au programme de l'enseignement secondaire de transition générale en Belgique.

Nous supposons de plus que le calcul matriciel est connu des étudiants. Remarquons toutefois que cette dernière hypothèse n'est pas indispensable, mais qu'elle est raisonnable étant données les constatations faites lors de l'enquête « master » (voir chapitre 4, § 3.2), où il s'est avéré que 92% des étudiants interrogés avaient déjà rencontré le calcul matriciel dans l'institution enseignement secondaire.

Nous présentons maintenant brièvement les principes essentiels, pour un enseignement de notions de dualité, qui ressortent de notre étude.

a) Maîtrise de Prérequis

Bien que nous ayons présenté, en début du § 1.1 ci-dessus, les hypothèses minimales à un enseignement des notions de dualité, il nous semble important, avant que la dualité ne soit présentée comme objet d'enseignement, de s'assurer que :

- la notion de fonction (et donc d'application linéaire) puisse être considérée comme un objet, détaché de ses représentations ;
- les étudiants disposent d'un minimum d'exemples d'espaces vectoriels relevant de différents cadres ;
- les étudiants puissent faire la distinction entre un vecteur et ses coordonnées.

Nous en expliquons maintenant les raisons.

La notion de fonction, détachée de ses représentations

Les conclusions des chapitres précédents nous ont tout d'abord montré l'importance de la notion de fonction dans le concept de dualité en algèbre linéaire (voir par exemple Dubinsky 1991, Dorier 2000). Il est en effet essentiel que les étudiants aient une conception de l'objet « fonction » détaché de ses représentations (ostensifs). Ce n'est qu'à cette condition que les étudiants pourront concevoir qu'une fonction peut être vue comme un élément d'un espace vectoriel, et non plus comme une « machine » transformant des éléments en d'autres éléments. Il s'agit donc d'un changement de contrat didactique institutionnel (chapitre 1, § 1.5) au niveau du contenu spécifique que représente la notion de fonction. Une partie des propositions va donc aller en ce sens.

Répertoire minimum d'espaces vectoriels

Il est aussi apparu très important que les étudiants disposent d'un répertoire minimum d'exemples d'espaces vectoriels relevant de différents cadres. Rappelons-nous en effet que, dans le contexte de la théorie APOS (chapitre 1, § 1.2), c'est en travaillant sur la détermination du dual de différents espaces vectoriels que Dubinsky (1991) affirme que l'Objet dual se transforme en Processus pour un individu (chapitre 1, § 3.2.a). Ou encore, si nous nous plaçons dans la perspective de Douady (1986), il est important de pouvoir proposer une variété de cadres lors de l'apprentissage d'une notion. Dans le cas de dualité, cette recommandation implique la connaissance d'un répertoire minimum d'espaces vectoriels, incluant des espaces vectoriels fonctionnels. Une partie des propositions d'enseignement prévues tiendront donc compte de cette constatation, permettant par la même occasion de montrer le caractère unificateur (Robert 1998) des notions d'algèbre linéaire.

Distinction vecteurs/coordonnées

Un autre prérequis important à maîtriser lorsque l'on est confronté à l'apprentissage de la dualité a été mis au jour lors des enquêtes effectuées à Namur (chapitre 4) : il s'agit de pouvoir faire la distinction entre les vecteurs et leurs coordonnées. Les premières enquêtes didactiques réalisées en algèbre linéaire (chapitre 1, § 3.1) avaient déjà mis au jour la confusion faite par les étudiants entre ces deux notions. Nous avons vu au chapitre 4 que cette confusion devenait cruciale lorsqu'on étudiait la dualité. Nous en reparlons aussi dans la présentation générale des propositions d'enseignement.

b) Appartenance d'une même notion à différents secteurs

En nous concentrant sur l'objet dualité, et plus particulièrement en étudiant la structuration du savoir lié à la dualité, il nous a aussi été permis de constater qu'une même notion pouvait appartenir à différents secteurs (voir chapitre 4, figure 4-2). Les formes linéaires par exemple, font partie du secteur « applications linéaires », mais font également partie du secteur « dualité ». Selon le secteur d'appartenance, une forme linéaire ne sera pas considérée de la même façon. Dans le premier secteur cité, on s'intéressera davantage au noyau, à l'image d'une forme linéaire, ou encore à la matrice qu'on peut lui associer, une fois des bases fixées. Et dans le secteur dualité, on s'intéressera à une forme linéaire en tant que *vecteur*, c'est-à-dire élément de l'espace vectoriel dual. On y considérera donc une forme linéaire comme un élément d'une base, ou comme un élément dont l'image par une application (transposée) sera un autre *vecteur* (forme linéaire). Nous avons montré au chapitre 4 que ce fait était source de difficulté pour les étudiants. Une proposition d'enseignement doit donc être formulée pour expliciter auprès des étudiants ce phénomène d'appartenance d'une même notion à différents secteurs.

c) Le statut FUGS des notions d'algèbre linéaire

Robert (1998) a bien mis en évidence le statut FUGS des notions d'algèbre linéaire, dont une des spécificités didactiques est le fait que ces notions ne se prêtent pas à une introduction de type situation fondamentale (Brousseau 1998). Ce qui a conduit Dorier, Robert, Robinet & Rogalski (1997a) à travailler la notion de *levier méta* à l'appui d'un travail préparatoire dans plusieurs cadres. Ces auteurs définissent ainsi le terme « méta » :

> Nous utilisons le mot « levier méta » (ou quelquefois simplement méta) pour désigner le recours dans l'enseignement à des éléments d'information ou de connaissance SUR les mathématiques. Cela peut concerner le fonctionnement des mathématiques, leur utilisation, leur apprentissage, ce peut être des éléments généraux ou particuliers. (p. 185).

Les étudiants se rendent très vite compte de l'aspect *formalisateur* que revêtent les notions d'algèbre linéaire, de par le langage mathématique formel utilisé, les nombreuses définitions introduites, les théorèmes démontrés, etc.

Par contre, alors que les caractères simplificateur et généralisateur sont évidents pour un mathématicien « expert », ils ne sont pas encore perceptibles pour un étudiant débutant. En effet, le caractère *simplificateur* des notions d'algèbre linéaire ne peut a priori être perçu par un étudiant confronté pour la première fois à l'enseignement de ce domaine, étant données les difficultés qu'il rencontre lors de son apprentissage (voir chapitre 1, § 3.1). De même, le caractère *généralisateur* ne peut être perçu qu'une fois maîtrisées les notions du domaine « algèbre linéaire », car elles peuvent seulement alors être généralisées à d'autres domaines ou disciplines. Il nous semble donc difficile d'exploiter ces deux caractéristiques pour l'introduction de notions liées à la dualité.

Mais pour ce qui est de l'aspect *unificateur*, il nous semble qu'il peut être perçu par un étudiant débutant si l'on se donne la peine de le lui illustrer. Ainsi, la notion de vecteur en algèbre linéaire permet-elle d'unifier les concepts de vecteur géométrique (Hillel 1997), de matrice, de fonction, de polynôme, d'équations, etc. Quel intérêt les étudiants auraient-ils à s'investir dans le nouveau langage formel que constitue celui de l'algèbre linéaire si celui-ci leur est présenté uniquement comme une nouvelle façon de concevoir la géométrie (en considérant les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, voire $\mathbb{R}^n$) ? Ceci met en défaut le « principe de nécessité » établi par Harel (2000), qui affirme qu'un étudiant n'apprendra que s'il ressent une nécessité intellectuelle (en opposition à une nécessité sociale ou économique) de ce qui lui est enseigné.

Il nous semble donc important d'avoir recours à la notion de *levier méta*, lors de l'illustration, auprès des étudiants débutant en algèbre linéaire, du caractère *unificateur* des notions d'algèbre linéaire.

d) Dialectique outil-objet

Enfin, nous plaçant dans la perspective de Douady (1986), il nous semble également intéressant de recourir à une dialectique outil-objet pour l'apprentissage de la dualité. Nous avons mis en évidence différentes finalités outils pour la dualité (chapitre 3, § 1), il est bon qu'une proposition d'enseignement du secteur dualité en présente une certaine variété.

Remarquons que les différents objectifs présentés ici ne sont pas nécessairement indépendants les uns des autres. Ainsi par exemple, pouvoir disposer d'un répertoire minimum d'exemples d'espaces vectoriels est-il directement relié à l'illustration du caractère unificateur de la notion d'espace vectoriel. Ou encore, le fait de considérer une fonction en tant qu'objet, indépendamment de ses représentations peut être travaillée lors de la présentation d'espaces vectoriels fonctionnels, ces derniers constituant un exemple particulier d'espaces vectoriels. Ainsi, les objectifs présentés dans les paragraphes précédents, ne doivent pas nécessairement être traités distinctement. Dans la section suivante (1.2), nous montrons en quoi ces différents principes nous guident dans la formulation de propositions plus concrètes d'introduction pour les différents thèmes de la dualité.

1.2. Formulation de propositions

Rappelons que dans (Toint 2007), le *domaine* de l'algèbre linéaire est structuré en différents *secteurs* (voir chapitre 4, Tableau 4-1 et Figure 4-2 ; Annexe 5). Dans les deux premiers chapitres du polycopié, on y distingue ainsi les secteurs « structures algébriques », « espaces vectoriels », « applications linéaires », « matrices » et « dualité ». Nous parlons de ces différents secteurs dans la formulation de propositions.

a) Les prérequis

Nous avons élaboré des propositions permettant d'aider les étudiants à détacher la notion de fonction de ses représentations, ainsi que diverses formulations permettant aux étudiants de se constituer un répertoire minimum d'exemples d'espaces vectoriels, incluant des espaces vectoriels fonctionnels. Etant donné que nous les avons mis en œuvre à l'université de Namur, nous les détaillons dans la section 2 de ce chapitre.

En ce qui concerne la confusion généralement faite par les étudiants entre un vecteur et ses coordonnées, nous émettons l'hypothèse qu'elle est induite par les notations utilisées lors de l'introduction de ces notions, qui a souvent pour cadre $\mathbb{R}^n$ (n étant un entier plus grand ou égal à 2). Nous estimons que des notations adaptées pourraient aider les étudiants à éviter cette confusion. Ainsi, si les coordonnées d'un vecteur (c'est-à-dire d'un élément d'un quelconque espace vectoriel) étaient systématiquement écrites sous forme de vecteur-colonne : $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, et que les éléments de $\mathbb{R}^n$ étaient systématiquement écrits sous forme de *n*-uplets : $(v_1 , ... , v_n)$, nous considérons que les étudiants auraient moins tendance à confondre un vecteur et ses coordonnées.

Ainsi, si nous considérons une base $B=\{b_1,...,b_n\}$ d'un espace vectoriel E construit sur le champ K, nous proposons de noter $[v]^B=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, où $v\in E$ et $c_1,...,c_n\in K$, pour exprimer le fait que $v=c_1b_1+c_2b_2+...+c_nb_n$.

Bien entendu, dans le cadre de $\mathbb{R}^n$, cette distinction de notation peut paraître inutile étant donné que les composantes d'un vecteur sont aussi ses coordonnées dans la base canonique. Mais dans un autre cadre que $\mathbb{R}^n$, la distinction de notations proposée prend tout son sens : si l'on considère par exemple l'espace vectoriel, construit sur le champ $\mathbb{R}$, des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ a comme coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Et, si l'on considère le dual de $\mathbb{R}^3$, la forme linéaire $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ telle que $\forall(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$: $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{5}x_1-7x_2+4x_3$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Nous rappelons l'importance de diversifier la nature des espaces vectoriels utilisés pour illustrer une notion d'algèbre linéaire, en l'occurrence la notion de coordonnées. En effet, en mettant en avant le caractère unificateur des notions considérées en algèbre linéaire, il s'agit d'aider l'étudiant à distinguer, sur les différents objets manipulés (vecteurs géométriques, vecteurs algébriques, polynômes, équations, fonctions, etc.), les caractéristiques communes (reprises en algèbre linéaire, comme les coordonnées dans une base) des caractéristiques propres à l'objet manipulé.

b) Les notations (crochets de dualité)

Précisons que nous recommandons l'utilisation de la notation du crochet de dualité :

$$\forall x\in E,\forall\varphi\in E':\varphi(x)\overset{not.}{=}[x,\varphi]$$ ou, selon les auteurs : $$\forall x\in E,\forall\varphi\in E':\varphi(x)\overset{not.}{=}[\varphi,x].$$

Nous en expliquons maintenant, thème par thème, l'intérêt.

Les formes linéaires

Les crochets de dualité permettent de présenter de manière *symétrique* à la fois la linéarité des formes linéaires (1), et les lois d'addition et de multiplication par un scalaire pour les formes linéaires (2). Les crochets de dualité permettent donc une unification des écritures.

$$\forall\alpha,\beta\in K,\forall x_1,x_2\in E,\forall\varphi\in E':[\alpha x_1+\beta x_2,\varphi]=\alpha[x_1,\varphi]+\beta[x_2,\varphi] \qquad (1)$$

$$\forall\alpha,\beta\in K,\forall x\in E,\forall\varphi_1,\varphi_2\in E':[x,\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2]=\alpha[x,\varphi_1]+\beta[x_2,\varphi_2] \qquad (2)$$

Le dual

Lorsque l'on présente et démontre le théorème de réflexivité, les crochets de dualité facilitent l'écriture. De plus, avec ces notations, on perçoit clairement que les éléments du primal et du bidual se « reflètent » à travers l'élément du dual (3). De plus, si l'on adjoint aux crochets de dualité les espaces impliqués (4), on rend explicites les espaces d'appartenance des éléments concernés (primal, dual ou bidual), rappelant ainsi dans l'écriture les espaces considérés :

$$\forall x \in E, \exists! \psi_x \in E'' : \forall \varphi \in E' : \quad [x, \varphi] \quad = \quad [\varphi, \psi_x] \qquad (3)$$

$$\text{ou encore:} \quad [x, \varphi]_{ExE'} \quad = \quad [\varphi, \psi_x]_{E'xE''} \qquad (4)$$

Les bases duales

De nouveau, dans ce thème, la notation des crochets de dualité permet une facilité d'écriture, que ce soit pour les relations unissant une base du primal et sa base duale ; ou que ce soit dans des démonstrations, comme par exemple pour prouver que le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base duale d'une base *B*, appliqué à un vecteur *x* du primal, fournit la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de ce vecteur *x* dans la base *B* considérée :

Soit $B = \{b_1, ..., b_n\}$ une base d'un espace vectoriel *E*, et $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ sa base duale. Alors $\forall x \in E \ : [x, \varphi_i]_{E\ x\ E'} \ = \ x_i$, où $x_i \ (1 \le i \le n)$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur *x* dans la base *B*.

De plus, la notation de crochets de dualité pourra servir d'outil-analogie (chapitre 3, § 1.1) lorsque, une fois introduites les notions de produit scalaire « < , > » et de base orthonormée, on présentera le résultat suivant :

Soit $B = \{b_1, ..., b_n\}$ une base orthonormée d'un espace euclidien *E*. Alors $\forall x \in E \ : \ < x, b_i > \ = \ x_i$, où $x_i \ (1 \le i \le n)$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur *x* dans la base orthonormée *B*.

L'application transposée

Si les notations de crochets de dualité ont été utilisées, une finalité outil-analogie de la l'application transposée f^t d'une application linéaire *f* (définie sur un espace vectoriel) pourra être mise en œuvre lors de l'introduction de l'application adjointe f^* d'une application linéaire *f* (définie sur un espace euclidien). Ainsi, avec les notations de crochets de dualité « [,] » et les notations « < , > » pour le produit scalaire, on peut écrire :

$$\forall x \in E, \ \forall \varphi \in E' : \quad [f(x), \varphi]_{E\ x\ E'} = \quad [x, f^t(\varphi)]_{E\ x\ E'} \quad \text{où } E \text{ est un espace vectoriel}$$

$$\forall x, y \in E : \quad < f(x), y > \quad = \quad < x, f^*(y) > \quad \text{où } E \text{ est un espace euclidien.}$$

Les annulateurs

De nouveau, sous ce thème, l'intérêt de l'utilisation des crochets de dualité réside dans la finalité outil-analogie qui peut être utilisée lorsque sera abordée l'orthogonalité. Ainsi, ces notations faciliteront l'analogie entre l'annulateur *S*° d'un sous-espace vectoriel *S*, et l'orthogonal $S^\perp$ d'un sous-espace *S* :

$$S° = \{\varphi \in E' : \forall x \in S, \quad [x, \varphi] \quad = 0\}$$

$$S^\perp = \{y \in E \ : \forall x \in S, \ < x, y > \ = 0\}.$$

c) Les formes linéaires

Après avoir proposé une formulation en vue de détacher la notion de fonction de ses représentations, et après avoir introduit les applications linéaires, on peut particulariser ces deux notions au concept de forme linéaire.

Pour justifier de l'intérêt[55] porté plus particulièrement aux formes linéaires, on peut évoquer l'importante diversité de ces dernières : le membre de gauche de l'équation linéaire à quatre inconnues « $7x-\sqrt{3}y+2z-5t=9$ » peut être interprété comme l'image, par une forme linéaire particulière, d'un élément de $\mathbb{R}^4$. Ou encore, l'opérateur d'intégration $\int_a^b \bullet \; \mathrm{d}x$ ($a,b\in\mathbb{R}$), qui a pour domaine un espace fonctionnel, est une forme linéaire ; de même que l'opérateur d'évaluation de la dérivée en un point, etc. Tous ces exemples sont connus des étudiants. Les rassembler sous un même vocable « forme linéaire » illustre une fois de plus le caractère unificateur de l'algèbre linéaire et justifie par la même occasion que l'on s'intéresse plus particulièrement à ces objets. De plus, nous mettons ainsi en œuvre une dialectique ancien-nouveau (Assude & Gelis 2002) : il s'agit d'introduire de nouveaux concepts en les situant par rapport aux concepts plus anciens déjà présentés ou connus.

> (…) la dialectique ancien-nouveau est un moyen d'analyse qui permet de montrer le rapport complexe entre ce qui est déjà là (en termes de connaissances des élèves mais aussi de l'organisation de l'enseignement) et ce qui est visé. (…) le problème choisi doit permettre aux élèves de mobiliser des connaissances anciennes mais celles-ci ne doivent pas être suffisantes pour le résoudre afin que les connaissances nouvelles puissent être les moyens nécessaires à cette résolution. Ainsi, la dialectique ancien-nouveau apparaît comme un élément important de l'intégration. (Assude & Gelis 2002, p. 262).

Enfin, il nous semble particulièrement important de rendre explicite le lien (historique) entre formes linéaires et systèmes d'équations linéaires. Cette relation (Figure 5-1) permettra d'introduire des concepts comme l'application transposée dans un cadre autre que formel.

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(x)=0 \\ \varphi_2(x)=0 \\ \quad\ldots \\ \varphi_m(x)=0 \end{cases} \text{ où } \begin{array}{l} x=(x_1,\ldots,x_n) \\ \varphi_i\in(\mathbb{R}^n)',\ 1\le i\le m \end{array}}$$

Figure 5-1 : Relation entre système d'équations linéaires et formes linéaires

Choix pour les étudiants d'une vue « méta »

Pour qu'un étudiant puisse percevoir une forme linéaire comme un objet du secteur dualité, il est nécessaire de pouvoir montrer que l'objet « forme linéaire » appartient à différents secteurs du domaine de l'algèbre linéaire, et que, selon le secteur considéré, on s'attachera à telle ou telle caractéristique de la forme linéaire. Ainsi, en considérant une forme linéaire particulière φ définie sur un espace vectoriel *E*, on s'intéressera par exemple à l'image par φ d'un vecteur de *E* si l'on se positionne dans le secteur des applications linéaires ; alors que l'on s'intéressera au même objet φ en tant que « simple *vecteur* » si l'on se positionne dans le secteur des espaces vectoriels ou dans le secteur de la dualité. De plus, en considérant l'effet

[55] En référence au principe de nécessité d'Harel (2000).

qu'a une forme linéaire φ issue d'une base duale sur un vecteur du primal, on se place spécifiquement dans le secteur de la dualité.

Bien entendu, nous ne pouvons pas utiliser les termes de la théorie anthropologique du didactique (« changement de *secteur* ») lors de l'introduction du thème des formes linéaires dans son enseignement. C'est pourquoi, dans les formulations de propositions d'enseignement, nous introduisons les termes de « niveau micro[56] » et « niveau macro[57] » pour les formes linéaires selon que l'étudiant doive considérer qu'elles appartiennent respectivement au secteur « applications linéaires » ou conjointement aux secteurs « espaces vectoriels » et « dualité ». L'appartenance *spécifique* au secteur dualité ne pourra être mise en évidence qu'après l'introduction d'autres thèmes ou sujets propres à la dualité, comme les bases duales ou le bidual par exemple. Pour ce faire, nous proposons d'utiliser, lors de l'enseignement des formes linéaires, des éléments explicatifs sur la position que peuvent occuper les formes linéaires selon le secteur considéré. En agissant de la sorte, nous faisons donc le choix pour les étudiants d'une vue « méta », en référence à Dorier, Robert, Robinet & Rogalski (1997a) (§ 1.1.c).

Nous ne développons pas ici les niveaux micro et macro comme des concepts théoriques. Nous nous contentons de les évoquer tels que nous les avons utilisés avec les étudiants. Nous reviendrons en conclusion de notre recherche sur la position que pourrait prendre la définition des niveaux micro-macro par rapport à d'autres cadres théoriques.

Précisons donc la manière dont nous avons proposé aux étudiants de parler de *niveau micro*. Dans le *secteur des applications linéaires*, avec un langage imagé, on peut considérer que l'on a une vue rapprochée sur l'objet « forme linéaire ». En effet, considérons une forme linéaire φ définie sur un espace vectoriel E et à valeurs dans le champ K sur lequel est construit E. On peut alors regarder φ en « détail », et observer par exemple la transformation qu'elle opère sur les différents vecteurs de l'espace vectoriel de départ. On peut en considérer le noyau, l'image, le rang, etc. Nous parlons alors du *niveau micro*. On peut en avoir une représentation imagée :

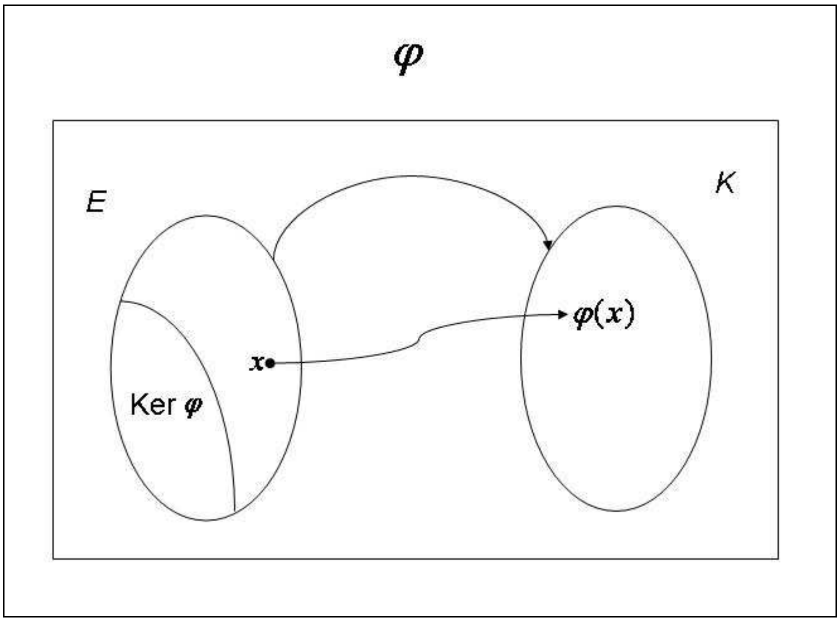


Figure 5-2 : Exemple du niveau micro d'une forme linéaire φ

[56] Pour microscopique
[57] Pour macroscopique

Si maintenant on s'éloigne de cette vision rapprochée et qu'on ne considère plus la forme linéaire φ comme un processus agissant sur des éléments d'un espace, mais bien comme un élément d'un espace fonctionnel, on en a alors une vision macro. Si l'on considère de la sorte d'autres formes linéaires définies sur le même espace *E*, et qu'on les rassemble dans un ensemble auquel on adjoint des lois d'addition et de multiplication par un scalaire, on obtient alors un espace vectoriel, qui n'est autre que le dual de *E*. On se situe alors dans le *secteur des espaces vectoriels* ou dans *le secteur de la dualité*. Nous parlons là d'un *niveau macro*. La représentation imagée que l'on peut présenter est alors la suivante :

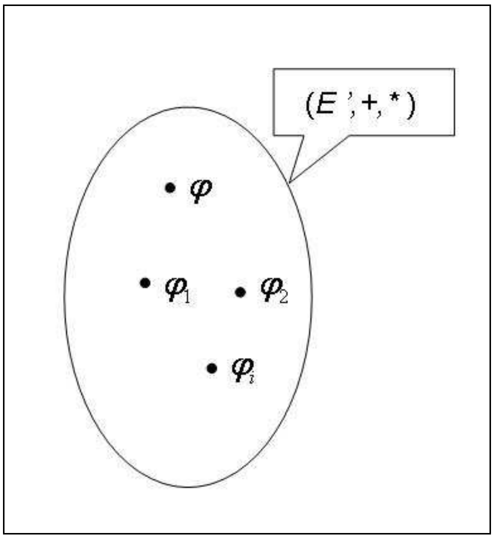


Figure 5-3 : Exemple du niveau macro d'une forme linéaire φ

Du point de vue de la théorie anthropologique, dans les deux niveaux présentés (micro-macro), il s'agit bien entendu du même objet « forme linéaire », mais considéré dans des secteurs différents d'algèbre linéaire. Ce changement de secteur ne va pas de soi pour les étudiants (voir chapitre 4) ; nous estimons que la distinction explicite entre niveaux micro et macro peut les aider à faire cette distinction, et à prendre en compte, pour l'objet « forme linéaire » les *sujets*[58] adéquats selon le *secteur* considéré.

Nous avons conçu un dispositif d'enseignement introduisant les niveaux micro-macro pour les formes linéaires qui a été utilisé (section 3.5).

d) L'espace vectoriel dual

L'espace vectoriel dual peut être introduit, dans un premier temps sans en donner nécessairement le nom, dans le secteur des espaces vectoriels. Il s'agit en effet d'un exemple particulier d'espace vectoriel. Dans la mesure où les étudiants ont pu détacher l'objet « fonction » de ses représentations, et qu'ils ont dès lors pu prendre conscience de l'existence d'espaces vectoriels fonctionnels (introduits dans leur répertoire d'espaces vectoriels), on peut particulariser à un espace vectoriel ne contenant que des formes linéaires définies sur un même espace (en considérant donc les formes linéaires au niveau *macro*). Ce faisant, nous nous trouvons donc conjointement dans le secteur « espaces vectoriels » et dans le secteur « dualité » du domaine de l'algèbre linéaire.

En ce qui concerne le dual, la distinction entre le secteur « espaces vectoriels » et le secteur « dualité » du domaine de l'algèbre linéaire peut être mise en évidence par le fait que

[58] En référence à l'échelle de co-détermination didactique de Chevallard (2007).

parmi tous les exemples d'espaces fonctionnels existants, ceux dont les éléments sont des formes linéaires sont spécialement intéressants, au moins selon deux axes. Tout d'abord, en considérant la particularité de leurs éléments : nous avons illustré le fait qu'il existe une grande variété de formes linéaires (voir § 1.2.c). Cela mérite donc bien qu'on s'intéresse plus particulièrement à l'ensemble des formes linéaires définies sur un même espace vectoriel, et qu'on lui donne un nom particulier : le dual de l'espace vectoriel *E*, où *E* représente le domaine (« espace de départ ») des formes linéaires[59] considérées, ou plus succinctement le dual de *E*, noté *E'*. Ensuite, le deuxième axe sur lequel on peut s'appuyer pour justifier de l'intérêt porté au dual d'un espace vectoriel, c'est que si l'on répète le processus, c'est-à-dire si l'on prend le dual du dual (bidual), on obtient alors des résultats intéressants (théorème de réflexivité), justifiant le fait qu'on ne réitère pas le processus indéfiniment (c'est-à-dire prendre le dual du bidual, et ainsi de suite).

Remarquons l'importance qu'il y a à ce que le dual soit attaché au secteur « dualité », *en plus* du secteur « espaces vectoriels ». En effet, en se plaçant dans le secteur dualité, l'espace vectoriel dual devient un objet à part entière, et plus seulement un exemple d'espace vectoriel. Cette remarque est essentielle si l'on souhaite introduire l'application transposée. En effet, nous avons montré (chapitre 4) que dans ce thème de la dualité, le dual occasionnait un second type de transition (Winsløw 2008) pour les étudiants, en quittant le bloc théorique de praxéologies liées aux formes linéaires ou aux bases duales par exemple, et en incorporant le bloc practico-technique de praxéologies liées à l'application transposée, étant donné que le dual fait partie des éléments constituant cette application.

e) Les bases duales

Nous proposons d'introduire les bases duales par l'intermédiaire d'une finalité outil-résolution. Il s'agit de tenter de répondre ainsi au principe de nécessité mis en avant par Harel (2000). Bien entendu, en restant dans le secteur « espaces vectoriels », le dual d'un espace vectoriel *E* de dimension finie, qui n'est autre qu'un espace vectoriel particulier, possède des bases. Mais en nous situant dans le secteur « dualité », on trouve un intérêt particulier à considérer la base duale d'une base particulière de *E* : cette base duale est en fait constituée des « formes coordonnées » permettant d'obtenir aisément les coordonnées de n'importe quel vecteur *x* de *E* dans la base particulière de *E* considérée. En introduisant les bases duales de la sorte, on met également en jeu la dialectique ancien-nouveau en rendant explicite le lien entre les coordonnées d'un vecteur dans une base particulière et la base duale de cette base particulière.

Un dispositif d'enseignement a été conçu en ce sens (§ 3.6) et utilisé partiellement (§ 4.2).

f) L'application transposée

Nous l'avons mis en évidence au chapitre 4, toutes les praxéologies liées à l'application transposée ne posent pas les mêmes problèmes aux étudiants confrontés à l'enseignement de la dualité. Ainsi, par exemple, lorsque les étudiants sont confrontés à une tâche du type « Etant donnée une application linéaire, en déterminer la transposée », nous avons montré qu'ils sont face à une transition du second type selon Winsløw (2008), engendrant de nombreuses difficultés pour les étudiants. Mais nous avons également constaté que d'autres tâches impliquant l'application transposée (relevant d'autres types) sont mieux travaillées par les étudiants. Ainsi en est-il par exemple pour la tâche proposée dans le travail de groupe (chapitre 4) : « Peut-on affirmer que $(f^t)^t = f$? ». La technique permettant de mener à bien

[59] Remarquons qu'ici interviennent à la fois le niveau micro et macro des formes linéaires.

cette tâche utilise des éléments théoriques. On peut donc dire que dans ce cas, le bloc practico-technique est englobé dans le bloc théorique et qu'il n'y a donc pas de clivage entre les blocs pratique et théorique. Ceci pose peu de problème aux étudiants, en référence à Robert (1998, p.151) : « *ce n'est pas toujours le travail dans un cadre général, formel, qui est le plus difficile* ».

Ainsi, vue la difficulté des étudiants à s'impliquer dans le travail de tâches relevant de types impliquant l'application transposée en dehors du cadre formel, il nous semble intéressant d'introduire l'application transposée dans différents cadres (Douady 1986) et registres (Duval 1995).

Tout d'abord, pour susciter la curiosité intellectuelle des étudiants (Harel 2000) et pour installer une dialectique ancien-nouveau (Assude & Gelis 2002), nous proposons de nous tourner vers le cadre matriciel pour motiver l'introduction de l'application transposée. Rappelons-nous en effet que, pour les étudiants, la notion de transposée est naturellement liée aux matrices (chapitre 4, § 3.1 et 3.2). Ainsi, à partir du moment où les matrices ont déjà été introduites comme représentantes d'applications linéaires par rapport à des bases données, on est en droit de se demander, une fois des bases A et B fixées respectivement dans un espace vectoriel E et F, quel est le rapport existant entre une application linéaire f allant de E vers F, représentée par la matrice M ($M = [f]_A^B$), et l'application linéaire g (qui n'est autre que f^t) représentée par la transposée de la matrice M (qui ne diffère que par la forme de la matrice M !).

Ensuite, un regard vers l'analyse à caractère épistémologique réalisée dans notre travail (chapitre 2) nous pousse à nous tourner vers le cadre des systèmes d'équations linéaires, en parallèle avec le cadre formel. Ce choix est motivé par le fait que le cadre des systèmes d'équations linéaires fut source d'émergence de concepts fondamentaux en algèbre linéaire (Dorier 2000).

Une proposition de situation d'introduction à l'application transposée reprenant ces recommandations a été placée en Annexe 7.

g) Les annulateurs

Les annulateurs constituent un thème important de la dualité. En effet, le thème des annulateurs et les sujets qui lui sont associés constituent la formalisation de ce qui a permis de faire émerger des concepts élémentaires en algèbre linéaire, comme le rang (Dorier 2000). Pour expliciter nos propos, reprenons le théorème présenté au chapitre 1, § 2.5, affirmant que si E est un espace vectoriel de dimension n et S un de ses sous-espaces, on a alors $\dim(S) + \dim(S°) = \dim E$. L'interprétation qui a été faite de ce théorème (chapitre 1, § 2.5) dans le cadre des systèmes d'équations linéaires, permet de démontrer les liens existants, dans un système d'équations linéaires, entre la dimension de l'ensemble des solutions et le nombre d'équations linéairement indépendantes du système considéré. La présentation des annulateurs par cette approche permet donc de proposer une finalité outil-démonstration ou une finalité outil-résolution des annulateurs. Ainsi, nous référant à la dialectique outil-objet, et à la recommandation de diversification de cadres (Douady 1986), nous préconisons l'introduction des annulateurs dans le cadre des systèmes d'équations linéaires qui les introduira alors dans le cadre formel.

2. Description d'un dispositif présent à l'université de Namur permettant la mise en œuvre de certaines propositions d'enseignement

L'essentiel des propositions pour l'enseignement de la dualité formulées dans la section précédente portent sur le contenu lui-même, mais certaines portent également sur les *dispositifs* au sein desquels ce contenu va être présenté. Nous nous arrêtons donc un instant, le temps de cette section, sur la présentation d'un dispositif, baptisé « opération Tremplin », présent à l'université de Namur. En effet, sa présentation nous semble intéressante d'une part parce que ce dispositif intervient dans la mise en œuvre de certaines propositions d'enseignement de la dualité, et d'autre part parce qu'il soulève des questions de contrat didactique qui ont une portée plus large (De Vleeschouwer 2008).

Il y a quelques années, les pouvoirs politiques wallons, conscients des difficultés posées par la transition, décident de majorer les subsides accordés aux universités pour les primo-inscrits, à condition que ces institutions mettent en place des mesures permettant de favoriser la réussite en première année.

La faculté des sciences de l'université de Namur (FUNDP) a ainsi eu les moyens d'associer aux dispositifs déjà existants pour l'aide aux étudiants de première année (tels les cours préparatoires au mois d'août ou des tests d'évaluation formative au mois de novembre), de nouveaux dispositifs, tels le tutorat et l'opération tremplin.

L'*Opération tremplin* a été mise en place pour la première fois lors de l'année académique 2000-2001. Elle est destinée aux étudiants de première année inscrits en faculté des sciences ou en faculté de médecine. Elle consiste à donner, *pour* et *à la demande* de ces étudiants, des séances de remédiations (participation libre) dans les principales matières scientifiques pour l'ensemble d'une section, ce qui peut concerner un public d'une vingtaine d'étudiants (en physique) à plusieurs centaines d'étudiants (en médecine).

Pour ce faire, chaque semaine de l'année académique, une plage horaire de deux à quatre heures est dégagée dans l'horaire de ces étudiants pour les heures de remédiation. Pour déterminer le contenu des remédiations, une organisation est mise en place : chaque semaine, des délégués représentant les étudiants d'une section (mathématique, physique, chimie, biologie, géologie-géographie, vétérinaire, pharmacie, médecine, sciences biomédicales) sont chargés de recueillir auprès de leurs pairs des sujets, aussi précis que possible, pour lesquels est souhaitée une remédiation. Des groupes-dialogue, composés de professeurs, d'assistants et d'étudiants, se réunissent alors par section (ou groupe de sections) pour débattre de la pertinence des sujets demandés ou préciser les demandes exprimées, et pour proposer ensuite, d'après les demandes, la planification d'une à quatre heures de remédiation par section qui s'inséreront dans le créneau horaire hebdomadaire réservé à l'*Opération tremplin*.

2.1. Plage horaire réservée

L'horaire des étudiants de première année inscrits en faculté des sciences ou en faculté de médecine est organisé pour qu'une plage horaire de plusieurs heures soit libérée *chaque semaine* de l'année académique : il n'y a alors ni cours théorique, ni travaux dirigés, ni travaux pratiques : les heures dégagées sont réservées à des remédiations « tremplin ».

Au début de la mise en place du dispositif, dès septembre 2000, la plage horaire hebdomadaire réservée à l'opération tremplin était le mercredi matin : quatre heures (deux heures en faculté de médecine) étaient ainsi consacrées à la révision des principales matières scientifiques. Au fur et à mesure des années, des évaluations de l'opération tremplin ont été réalisées, sur un plan quantitatif (nombres d'heures données, participation des étudiants, etc.)

et qualitatif. Suite aux informations ainsi recueillies, et suite à divers évènements, telles des modifications de cursus ou des contraintes horaires, des adaptations de la plage réservée à l'opération tremplin ont eu lieu. Mais le principe reste le même : dès le début de l'année académique, une plage horaire de deux à quatre heures (selon les sections) est réservée à l'opération tremplin, c'est-à-dire aux remédiations à la demande des étudiants. Le Tableau 5-1 reprend les plages horaires réservées pour chaque section au second quadrimestre[60] de l'année académique 2009-2010.

Section	**Nombre d'heures hebdomadaires réservées à Tremplin**	**Jour de la semaine où se donnent les remédiations tremplin**	**Plage horaire**
Mathématique	4	Mercredi	De 8h30 à 12h30
Physique	3	Mercredi	De 9h30 à 12h30
Chimie	2	Mercredi	De 10h30 à 12h30
Biologie	2	Mercredi	De 10h30 à 12h30
Géologie/géographie	2	Mercredi	De 10h30 à 12h30
Pharmacie	2	Mercredi	De 10h30 à 12h30
Vétérinaire	2	Mercredi	De 16h00 à 18h00
Médecine	2	Jeudi	De 16h00 à 18h00
Sciences Biomédicales	2	Mardi	De 16h00 à 17h00
		Jeudi	De 16h00 à 17h00

Tableau 5-1 : Plages horaires réservées à l'opération Tremplin, second quadri 2009-2010

2.2. Les acteurs de l'opération Tremplin

De nombreux acteurs et collectifs participent à l'opération tremplin : des groupes-dialogue, composés d'étudiants-délégués, de responsables-groupe-dialogue et de responsables-matières ; des remédiateurs ; le secrétariat administratif de la faculté ; et bien entendu les étudiants qui sont à l'origine des demandes de remédiation, et à qui sont destinées les séances tremplin in fine. Nous expliquons maintenant le rôle de chacun, nous basant sur une description rédigée par Thiry (2004).

Les groupes-dialogue

Les groupes-dialogue rassemblent des délégués d'étudiants, des professeurs et des assistants d'une même section (math, physique, chimie, etc.) ou d'un groupe de sections. Les groupes-dialogue se réunissent une fois par semaine, généralement sur le temps de midi. Les délégués des étudiants y exposent les questions ou les points de matière posant question auprès de leurs pairs. Avec l'aide des responsables-matières (professeurs ou assistants), les questions évoquées sont précisées pour donner lieu à un sujet de remédiation qui sera proposé dans l'horaire tremplin de la semaine suivante.

[60] Le second quadrimestre d'une année académique couvre la période de cours qui débute après les examens de janvier. Il comporte quinze semaines de cours.

Ainsi, chaque semaine, plusieurs intervenants de l'opération tremplin devront participer à la réunion d'un, ou parfois de plusieurs groupes-dialogue. Ces réunions ne sont pas nécessairement longues, mais elles constituent une partie essentielle de l'opération. L'opération débutant dès le début de l'année académique et se terminant lors de la dernière semaine de cours, on peut considérer que chaque groupe-dialogue se réunit environ 25 fois par année académique.

Les étudiants-délégués

En début d'année académique, pour chaque section (math, physique, chimie, etc.), des délégués sont choisis parmi les étudiants pour représenter ces derniers dans les groupes-dialogue concernés. La tâche de ces étudiants-délégués consiste à recueillir auprès des condisciples de leur section d'études, les sujets qui font l'objet de difficultés de compréhension, et à les transmettre aux responsables-matières lors des réunions des groupes-dialogue. Le recueil des sujets posant problème peut se faire oralement auprès d'un délégué, ou en faisant passer une feuille dans l'auditoire où chacun inscrit les questions qu'il se pose ou marque une croix à côté de questions déjà inscrites pour apporter un poids plus important à telle ou telle question déjà proposée. Cette dernière technique, si elle est efficace dans des sections peu nombreuses, n'est pas très efficace quand la taille du groupe devient plus importante car dans ce cas, la feuille n'arrive pas à circuler dans tout l'auditoire pendant une ou même deux heures de cours.

Les responsables-groupe-dialogue

Chaque groupe-dialogue a pour responsable un professeur ou un assistant, qui anime le groupe-dialogue de la ou des sections concernées. En début d'année académique, ces responsables doivent s'assurer du choix d'un nombre qu'ils jugent suffisant de délégués étudiants pour la section ou le groupement de sections concerné(e). Au cours de l'année, ces responsables convoquent les réunions hebdomadaires du groupe-dialogue de leur section, où seront arrêtés les thèmes abordés aux séances de remédiation. Les responsables-groupe-dialogue transmettent les questions posées par les étudiants aux responsables-matière qui n'auraient pas été présents à la réunion du groupe-dialogue qu'ils dirigent.

Les responsables-matière

Les responsables-matière sont des professeurs ou assistants spécialisés dans une (ou plusieurs) matière(s) étudiée(s) dans la section ou le groupement de sections concerné(e) par le groupe-dialogue dont ils font partie. Leur rôle consiste à participer aux réunions des groupes-dialogue, en concertation avec le responsable-groupe-dialogue concerné ; à décider en concertation avec les remédiateurs de son équipe les thèmes à aborder en salle avec les étudiants lors des séances de remédiation tremplin ; à transmettre ces thèmes au secrétariat avant chaque lundi matin, moment où les horaires pour les remédiations tremplin sont confectionnés.

A titre d'information, le Tableau 5-2 présente la composition des différents groupes-dialogue pour l'année académique 2009-2010, ainsi que les matières scientifiques qui y sont discutées. La colonne de gauche est composée des numéros des groupes-dialogue, qui ne sont qu'un artifice permettant de mieux visualiser les groupements de sections. La troisième colonne indique le nombre de professeurs et d'assistants qui participent au groupe-dialogue concerné, soit en tant que responsable-groupe-dialogue, soit en tant que responsable-matière.

Groupe dialogue	Section	Nbre de prof./ assist.	Nbre de représentants des étudiants	Matières scientifiques abordées en tremplin :			
				Biologie	Chimie	Math.	Phys.
1	Mathématique	6	5			x	x
	Physique		2		x	x	x
	Chimie		3	x	x	x	x
2	Biologie	5	5	x	x	x	x
	Géologie/Géographie		3	x	x	x	x
	Méd. Vétérinaire		4	x	x		x
	Pharmacie		7	x	x		x
	Sciences Biomédicales		3	x	x	x	x
3	Médecine[61]	4	0	x	x		x

Tableau 5-2 : Composition des groupes-dialogue en 2009-2010 et matières scientifiques concernées

Les remédiateurs

Les remédiateurs sont des professeurs ou assistants qui se chargent de donner les séances de remédiation dont les sujets auront été déterminés dans les groupes-dialogue. Il se peut bien entendu qu'un remédiateur soit aussi un responsable-matière pour une section. Mais ce n'est pas nécessairement le cas, et cela n'entrave en rien le bon fonctionnement de l'opération tremplin.

Le secrétariat administratif de la faculté

Sur base des informations envoyées chaque semaine par les responsables-matières, le secrétariat administratif de la faculté confectionne les horaires « tremplin » et les transmet à toute l'équipe *tremplin* ainsi qu'à tous les étudiants (par voie d'affichage papier et valves électroniques).

Dans (De Vleeschouwer 2008), nous montrons comment, sous certaines conditions, le dispositif tremplin que nous venons de décrire peut aider des étudiants de première année d'université à entrer dans un contrat (didactique) institutionnel, aux différents niveaux que nous avons spécifiés (voir chapitre 1, § 1.5). Nous ne rentrerons pas ici dans cette analyse, renvoyant le lecteur intéressé à la référence mentionnée.

Nous allons, entre autres, utiliser le dispositif tremplin décrit dans cette section pour mettre en place certaines propositions d'enseignement concernant l'introduction de la dualité en algèbre linéaire afin d'aider les étudiants dans leur apprentissage des notions liées à la dualité.

[61] La section Médecine n'a pas de délégués-étudiants : tous les étudiants interagissent via un forum « Tremplin-Médecine » ouvert sur Webcampus, une plateforme électronique spécifique à l'université de Namur (et à l'Académie Louvain).

3. Mise en œuvre de dispositifs concernant la dualité à l'université de Namur

Dans notre recherche, nous avons pu tester des dispositifs d'enseignement concernant la dualité, conçus conformément aux principes et propositions décrits dans la section 1, à destination des étudiants inscrits en première année en mathématique ou en physique à l'université de Namur. Nous nous proposons de décrire ces dispositifs d'enseignement dans cette section, après avoir clarifié certains points. Pour une raison de clarté, nous appellons « MP1 » la première année d'étude pour les mathématiques ou la physique à l'université de Namur (Belgique).

On conçoit aisément que la conception de ces dispositifs est influencée par la structure du savoir « dualité » déjà présente dans le cours d'algèbre linéaire (Toint 2007) de MP1 et considérée dans nos enquêtes présentées au chapitre 4, étant donné que c'est dans le cadre de ce cours que nous avons eu l'occasion de proposer les dispositifs d'enseignement tenant compte de notre recherche. Rappelons que ce cours d'algèbre linéaire ne concerne que les espaces vectoriels de *dimension finie*.

Comme la structuration institutionnelle qui y est faite de la dualité n'incorpore pas le thème des annulateurs (voir Annexe 5 pour un plan du cours considéré), nous n'avons pas voulu l'introduire par le biais d'un dispositif d'enseignement, sachant que nous nous serions heurtée à des contraintes institutionnelles, notamment temporelles. Pour cette dernière raison évoquée, nous n'avons pas non plus mis en œuvre de dispositif en rapport avec l'application transposée. Concernant ce dernier thème rappelons que nous avons conçu, mais non testé, une situation d'introduction présentée en Annexe 7.

Après avoir décrit le déroulement général temporel des dispositifs mis en place à l'université de Namur (§ 3.1), nous les détaillons un par un (§ 3.2 $\rightarrow$ 3.6). Nous présentons ensuite l'analyse de données les concernant et leurs conséquences pour les étudiants (§ 4).

3.1. Déroulement général

Un premier ensemble de dispositifs d'enseignement a été mis en œuvre d'octobre 2008 à février 2009 pour compléter l'enseignement déjà proposé concernant la dualité dans le cours d'algèbre de MP1 (voir Annexe 5 pour un plan de l'enseignement théorique initial). Ces dispositifs impliquent des travaux de groupe (chapitre 4, § 1) et le dispositif tremplin (§ 2), mais ne concernent pas le cours théorique d'algèbre linéaire.

Un autre dispositif d'enseignement a été conçu et proposé en octobre-novembre 2009, concernant les bases duales, pour le cours théorique à destination des étudiants de MP1. Le professeur en charge du cours n'en a cependant repris qu'une partie. Nous en expliquons les raisons dans la section correspondante (§ 4.2).

Nous présentons en Annexe 8 un aperçu général du déroulement temporel de l'enseignement de l'algèbre linéaire à destination des étudiants de MP1, enseignement qui est complété par les dispositifs conçus, lors de l'année académique 2008-2009. Nous n'avons repris le détail que pour les mois d'octobre, novembre et début décembre car il s'agit de la période concernée par l'enseignement de la dualité.

Concernant les prérequis

Concernant ce que nous avons nommé les prérequis pour la dualité (§ 1.1.a), nous avons conçu et mis en œuvre trois dispositifs : un commun aux deux sections de MP1, un uniquement pour les mathématiciens, et un autre uniquement pour les physiciens. En effet, le cursus des étudiants de ces deux sections n’est pas exactement identique, et nous en avons tenu compte dans la conception et la mise en œuvre des deux premiers dispositifs :

- Les étudiants en mathématiques de première année à l’université de Namur voient le cours théorique et les travaux dirigés d’algèbre linéaire complétés par un travail de groupe (obligatoire), alors que les physiciens n’ont pas ce travail de groupe prévu au programme. Or, un des dispositifs conçus a pris place dans le travail de groupe ; il ne s’adresse donc qu’aux mathématiciens. Le but de ce dispositif est d’illustrer le caractère unificateur de la notion d’espace vectoriel, et d’enrichir par la même occasion le répertoire des espaces vectoriels des étudiants de la section mathématique. De plus, la notion de fonction y est travaillée par l’abord d’espaces vectoriels fonctionnels. Nous faisons référence à ce travail de groupe sous les termes *dispositif « Espaces vectoriels »* (§ 3.3).
- D’autre part, rappelons que les étudiants inscrits en première année de *mathématique* à l’université de Namur suivent un cours d’ « Introduction à la démarche mathématique » qui comporte, entre autres, un chapitre consacré aux correspondances, fonctions et applications. Ce cours théorique est assorti de travaux dirigés (exercices), en lien direct avec les cours d’analyse et d’algèbre linéaire. Cependant, ce cours n’est pas présent dans le cursus des physiciens, qui suivent pourtant la plupart des cours mathématiques (analyse, algèbre linéaire, géométrie) avec les mathématiciens. Nous avons donc conçu un dispositif relatif à la notion de fonction uniquement à destination des étudiants inscrits en première année de *physique* à l’université de Namur. Ce travail a pour but à la fois de détacher la notion de fonction de ses représentations, et d’enrichir d’un exemple le répertoire d’espaces vectoriels pour les étudiants concernés. Nous l’avons nommé *dispositif « Applications »* (§ 3.4), et proposé dans le cadre de l’opération Tremplin (non obligatoire).

Enfin, un troisième dispositif s’adressant conjointement aux mathématiciens et aux physiciens a été conçu afin d’illustrer par les matrices le caractère unificateur des structures algébriques (groupe, anneau, etc.), et afin que les étudiants puissent intégrer les connaissances sur les matrices acquises dans l’institution enseignement secondaire aux nouvelles structures présentées dans l’enseignement de l’algèbre linéaire à l’université de Namur (Toint 2007). Ce dispositif a été proposé dans le cadre de l’opération Tremplin, et nous l’avons baptisé *dispositif « Matrices »* (§ 3.2). Précisons dès à présent que ce dispositif peut facilement faire partie d’un dispositif plus large, permettant également d’illustrer la possibilité pour une notion (les matrices en l’occurrence) d’appartenir à différents secteurs (voir § 1.1.b). En effet, après avoir permis d’illustrer les différentes structures algébriques définies dès le début du cours d’algèbre linéaire, les matrices peuvent également être reliées au secteur des applications linéaires si on les considère comme des représentantes, à travers des bases données, d’applications linéaires. En changeant de secteur, les matrices sont alors considérées sous un autre regard, à un autre niveau (§ 1.2.c).

Concernant la dualité

Parmi les différents thèmes de la dualité (voir chapitre 1, § 2), nous en avons sélectionné trois afin de mettre en œuvre des dispositifs d’enseignement les concernant. Il s’agit des thèmes « formes linéaires », « dual » et « bases duales ». Pour des raisons de contraintes institutionnelles, les deux autres thèmes définis pour la dualité, l’application transposée et les annulateurs, n’ont pas fait l’objet d’un dispositif d’enseignement à l’université de Namur. Les contraintes institutionnelles en question sont diverses. Tout d’abord, les espaces d’enseignement où nous avions une relative liberté sont les séances tremplins et les travaux de groupe, mais pas le cours théorique ni les exercices, qui sont attribués à des titulaires. Ensuite, il y a les inévitables contraintes temporelles auxquelles s’ajoute la place relativement petite laissée à la dualité dans le plan général du cours d'algèbre de MP1 (voir Annexe 5). Il ne nous a donc été possible de proposer, en plus des trois dispositifs concernant les prérequis à la dualité, que deux dispositifs concernant les trois thèmes cités.

Un premier dispositif, nommé « *formes linéaires et dual* » (§ 3.5) a pour but de présenter les niveaux micro-macro (§ 1.2.c) des formes linéaires, et d'introduire ainsi l'espace vectoriel dual. Ce dispositif a été proposé dans le cadre de l'opération Tremplin.

Enfin, un dispositif d'introduction a été proposé pour l'enseignement de la notion de bases duales (cours théorique). Il s'agit du dispositif « *bases duales* » qui a été proposé l'année scolaire 2009-2010. Seule une partie du dispositif proposé a été utilisée par le professeur en charge du cours.

Nous détaillons maintenant (§ 3.2 $\rightarrow$ § 3.6) les différents dispositifs que nous venons de présenter. L'analyse des données les concernant sera présentée à la section suivante (§ 4).

3.2. Dispositif « Matrices »

Nous avons rappelé l'importance d'illustrer auprès des étudiants débutant en algèbre linéaire le caractère unificateur des notions d'algèbre linéaire (§ 1.1.c). Nous avons conçu un dispositif permettant d'illustrer différentes structures algébriques (groupe, anneau, corps, espace vectoriel) présentées aux étudiants dès les premiers cours d'algèbre de MP1 par le biais des matrices.

Le choix des matrices est motivé par le fait que nous avons mis en évidence lors de l'analyse du questionnaire « master » (chapitre 4, § 3.2) qu'une très grande majorité des étudiants s'inscrivant en mathématique à l'université de Namur ont déjà rencontré la notion de matrice dans l'enseignement secondaire, principalement lors du calcul matriciel. Et concernant la petite minorité d'étudiants qui n'a pas abordé cette matière dans l'institution secondaire, l'occasion de l'aborder leur a été donnée pendant les cours propédeutiques (facultatifs) organisés à l'université de Namur à la fin du mois d'août qui précède leur première rentrée académique. Dans ces cours, les futurs mathématiciens ou physiciens ont alors l'occasion de voir ou revoir les matrices qui leur sont présentées dans le cadre du calcul matriciel et de résolution de systèmes d'équations linéaires. Un polycopié est associé à ces sessions préparatoires, et les étudiants sont avertis en début d'année académique que ce polycopié contient en quelque sorte les prérequis nécessaires aux études qu'ils entament. On peut donc supposer que les matrices (vues comme tableaux de nombres) ne sont pas étrangères aux étudiants, inscrits à Namur, débutant en algèbre linéaire.

Etant donné le statut unificateur (Robert 1998) des notions d'algèbre linéaire, il est important d'intégrer les connaissances sur les matrices ainsi acquises dans l'institution enseignement secondaire aux nouvelles structures algébriques présentées dans l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'université de Namur (voir Annexe 5).

Si le cours théorique a déjà abordé la définition d'une matrice comme étant la représentation d'une application linéaire (par rapport à des bases fixées), on peut compléter le rôle du dispositif « Matrices » en illustrant le fait qu'une même notion peut appartenir à des secteurs différents en exhibant de plus l'appartenance des matrices au secteur « applications linéaires ». Ainsi, à la fin de l'activité prévue par le dispositif « Matrices », on peut, si l'avancée du cours théorique le permet, rappeler le statut supplémentaire vu au cours théorique : une matrice peut aussi être considérée comme la représentation d'une application linéaire, une fois que l'on s'est fixé des bases. Selon le contexte considéré, on attribuera tel ou tel statut aux matrices.

Méthodologie

Le dispositif « Matrices » que nous allons présenter a été mis en œuvre à l'université de Namur dans le cadre de l'opération tremplin. Vue la spécificité de l'opération tremplin (§ 2), nous avons dû attendre un manque de questions spécifiques de la part des étudiants en groupes-dialogues afin de pouvoir proposer et insérer le dispositif « Matrices » dans l'opération. Ainsi, même si les structures algébriques avaient été présentées dès les premiers cours d'algèbre linéaire aux étudiants débutants, leur illustration par l'intermédiaire des matrices n'a pu se faire que fin octobre 2008. Cette illustration a alors pu être proposée par l'intermédiaire du dispositif « Matrices » aux étudiants inscrits en première année mathématique ou physique. Ce dispositif a aussi pu être mis en place en octobre 2009 dans le cadre de l'opération tremplin, mais uniquement pour les étudiants inscrits en physique, de nouveau pour des raisons propres à l'organisation de l'opération tremplin.

Au moment où ce dispositif a été mis en place pour la première fois (fin octobre 2008), le premier chapitre, consacré aux espaces vectoriels, avait été présenté au cours théorique, de même que les applications linéaires, les transformations linéaires, les matrices associées aux transformations et applications linéaires, les changements de base et les formes linéaires. Les travaux dirigés avaient été donnés sur la matière du premier chapitre, et les étudiants de première année mathématique y avaient aussi abordé les applications linéaires. Par contre, lors de la mise en place de ce même dispositif début octobre 2009 pour les physiciens, les étudiants n'avaient pas encore vu au cours théorique qu'une matrice pouvait être définie comme la représentation d'une application linéaire (par rapport à des bases fixées).

En 2008, les étudiants avaient reçu l'énoncé du dispositif « Matrices » la semaine avant la tenue de la séance tremplin ; il leur avait été recommandé d'y travailler préalablement à domicile. Que ce soit en 2008 ou en 2009, il était proposé aux étudiants, lors de la séance tremplin, de travailler les questions présentes dans le dispositif par groupe de deux ou trois. Tous les étudiants n'ont pas suivi cette recommandation. Pour ce dispositif, nous recommandons de la part de la personne mettant en œuvre le dispositif, au cours de la séance, un accompagnement et une correction régulière des tâches à accomplir par les étudiants, étant donné que des transitions de premier type (Winsløw 2008) sont susceptibles d'apparaître (voir analyse a priori).

Présentation et analyse a priori

Rappelons que le but de ce dispositif est de faire prendre conscience aux étudiants des différents statuts que peut avoir une matrice en algèbre linéaire : élément d'un groupe, d'un anneau, d'un espace vectoriel. Selon le statut considéré, on pourra manipuler la matrice de telle ou telle façon (la multiplication matricielle est par exemple prise en compte dans la structure d'anneau, mais pas dans la structure d'espace vectoriel). Le caractère unificateur des notions algébriques est aussi mis en évidence.

Nous présentons maintenant le dispositif « Matrices » que nous analysons ensuite.

Enoncé du dispositif « Matrices »

1ère BAC Physique Octobre 2008

Tremplin d'ALGEBRE

Les matrices

Question 1 :

Si l'on note $\mathcal{M}_{2x3}$ l'ensemble des matrices 2 lignes, 3 colonnes, et $\mathcal{M}_{3x3}$ l'ensemble des matrices 3 lignes, 3 colonnes, peut-on dire que :

a) **$\{\mathcal{M}_{3x3}\ ,\ +\}$** (où « + » représente l'addition habituelle de deux matrices) est un **groupe commutatif** ? Si oui, donnez le neutre pour la loi « + ».

b) **$\{\mathcal{M}_{2x3}\ ,\ +\}$** (où « + » représente l'addition habituelle de deux matrices) est un **groupe commutatif** ? Si oui, donnez le neutre pour la loi « + ».

c) **$\{\mathcal{M}_{3x3}\ ,\ +,\ *\ \}$** (où « + » représente l'addition habituelle de deux matrices et « $*$ » représente la multiplication habituelle de deux matrices) est un **anneau unitaire** ? Si oui, donnez-en l'unité pour la loi « $*$ ».

d) **$\{\mathcal{M}_{2x3}\ ,\ +,\ *\ \}$** (où « + » représente l'addition habituelle de deux matrices et « $*$ » représente la multiplication habituelle de deux matrices) est un **anneau unitaire** ? Si oui, donnez-en l'unité pour la loi « $*$ ».

e) **$\{\mathcal{M}_{3x3}\ ,\ +,\ *\ \}$** (où « + » représente l'addition habituelle de deux matrices et « $*$ » représente la multiplication habituelle de deux matrices) est un **corps** ? Si oui, donnez le symétrique pour la loi « $*$ » d'un élément quelconque de $\mathcal{M}_{3x3}$.

f) Pourrait-on adjoindre une structure d'espace vectoriel à l'ensemble $\mathcal{M}_{2x3}$? Est-il possible de trouver un corps commutatif $\{K, +, *\}$ et des lois « # » et « . » pour que **$\{\mathcal{M}_{2x3}\ ,\ \{K,\ +\ ,\ *\ \},\ \#,\ .\ \}$** soit un **espace vectoriel** ? Si oui, explicitez-les.

g) Si l'on appelle *vecteur* un élément d'un *espace vectoriel*, peut-on dire alors qu'une matrice rectangulaire à 2 lignes et 3 colonnes $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ est un vecteur (avec $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$) ? Justifiez.

Question 2 :

a) Peut-on dire que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes ?

b) Peut-on dire que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes ?

c) Peut-on dire que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes ?

Question 3 :

Pour chacun des items de la question 2 ci-dessus, exprimez, lorsque cela est possible, un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres.

Question 4 :

Si vous avez défini un espace vectoriel à la question 1, donnez-en la dimension et, si celle-ci est finie, donnez une base de l'espace vectoriel considéré.

Analyse a priori du dispositif « Matrices »

Nous avons justifié le choix de l'objet matrice pour ce dispositif (voir début § 3.2). Nous avons choisi d'illustrer les structures par l'intermédiaire des matrices 2 lignes, 3 colonnes (l'ensemble $\mathcal{M}_{2x3}$) et des matrices 3 lignes, 3 colonnes (l'ensemble $\mathcal{M}_{3x3}$). Ces dimensions nous semblent raisonnables pour permettre, si nécessaire, une manipulation des composantes des objets considérés.

Le dispositif est composé de quatre questions. La première propose l'illustration de différentes structures algébriques au moyen des matrices, et est composée de diverses sous-questions. Les deux premières de ces sous-questions concernent la structure de groupe commutatif. On demande tout d'abord si $\mathcal{M}_{3x3}$ l'ensemble des matrices carrées muni de l'addition habituelle de deux matrices est un groupe commutatif. L'objectif est que les étudiants se rendent compte du caractère unificateur des structures algébriques. Ainsi, dans les différentes propriétés définissant un groupe $\{E,+\}$, comme par exemple la propriété d'associativité : $\forall x, y, z \in E \ : \ (x+y)+z = x+(y+z)$, l'élément « x » ne désigne pas seulement un nombre ou un vecteur géométrique ($\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$), mais peut également représenter une matrice. De plus, nous demandons aux étudiants de donner le neutre pour la loi d'addition matricielle. Ainsi, les étudiants prennent conscience que le neutre présent dans les propriétés définissant un groupe n'est pas uniquement le chiffre « 0 », mais peut également représenter une matrice nulle : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Remarquons que le type de tâches proposé n'est pas familier aux étudiants arrivant dans l'institution université. Ils doivent faire preuve d'initiative (Robert 1998), ils doivent investiguer. Le bloc pratique de la praxéologie concernée n'est pas vraiment calculatoire, ce qui risque de perturber les étudiants. La présence du bloc théorique est importante ; on perçoit là une transition du premier type (Winsløw 2008). Nous nous attendons donc à ce que les tâches proposées aux étudiants leur posent difficulté ; c'est pourquoi la méthodologie prévoit un travail par petits groupes d'étudiants, ainsi qu'un suivi et une correction régulière de la part de la personne mettant en œuvre le dispositif.

Pour la deuxième sous-question concernant les groupes, nous avons fait varier l'ensemble de départ, et considérons maintenant des matrices rectangulaires, moins familières aux étudiants. Des tâches relevant du même type que ceux présents dans la première sous-question sont proposées. Les étudiants se rendent ainsi compte qu'une même structure (groupe commutatif) peut être attribuée à des ensembles différents ($\mathcal{M}_{3x3}$ et $\mathcal{M}_{2x3}$).

Les deux sous-questions suivantes concernent la structure d'anneau unitaire. Nous proposons à nouveau des tâches relevant des mêmes types que dans les deux premières sous-questions, particularisées à la structure d'anneau unitaire et à la demande de l'unité pour la loi de multiplication (à la place du neutre pour la loi d'addition). Les deux ensembles de matrices $\mathcal{M}_{3x3}$ et $\mathcal{M}_{2x3}$ sont à nouveau proposés. Bien entendu, ici la structure d'anneau unitaire peut être attribuée, moyennant l'adjonction des lois décrites, au premier ensemble considéré ; alors que ce n'est pas le cas pour l'ensemble des matrices rectangulaires $\mathcal{M}_{2x3}$. Ces sous-questions permettent de constater que le passage d'une structure de groupe, même commutatif, à une structure d'anneau n'est pas du tout évidente.

La sous-question suivante concerne la structure de corps. Comme cette structure suppose a priori une structure d'anneau unitaire, nous ne la posons que pour l'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_{3x3}$ à qui une telle structure (anneau unitaire) peut être associée. Sachant que les types de tâches impliqués dans ce dispositif obligent les étudiants à travailler avec des praxéologies complètes, ce qui est source de difficultés potentielles auprès des étudiants (premier type de transition), nous accompagnons les étudiants dans leur raisonnement en leur demandant de donner le symétrique pour la loi « * » d'un élément quelconque de $\mathcal{M}_{3x3}$, ce qui n'est évidemment pas possible pour toute matrice carrée, étant donné que des matrices carrées dont le déterminant est nul ne possèdent pas de symétrique (inverse) pour la multiplication matricielle. L'importance des quantificateurs dans les expressions décrivant les propriétés des structures est fortement mise en évidence dans la tâche proposée ici (caractère formalisateur des notions impliquées).

Les deux dernières sous-questions s'intéressent à la structure d'espace vectoriel. Nous nous considérons ici uniquement l'ensemble des matrices rectangulaires $\mathcal{M}_{2x3}$. Il est demandé aux étudiants de trouver un corps commutatif $\{K, + , * \}$ et des lois « # » et « • » pour que $\{\mathcal{M}_{2x3}, \{K, + , * \}, \#, \bullet \}$ puisse être considéré comme un espace vectoriel. En reprenant l'ensemble des matrices rectangulaires $\mathcal{M}_{2x3}$, sur base duquel une structure d'anneau n'a pu être construite, nous souhaitons mettre en évidence qu'il n'y a pas toujours de hiérarchie entre les structures présentées séquentiellement dans le cours théorique. Une fois précisées les lois à adjoindre à l'ensemble $\mathcal{M}_{2x3}$ pour le considérer en tant qu'espace vectoriel, on demande aux étudiants si une matrice rectangulaire quelconque de cet espace peut être considérée comme un vecteur, ceci afin d'illustrer le caractère unificateur des espaces vectoriels.

Les trois questions suivantes du dispositif « Matrices » s'attachent plus particulièrement à la notion d'espace vectoriel et permettent d'illustrer des thèmes et sujets de ce secteur d'algèbre linéaire par l'intermédiaire des matrices, mettant ainsi encore en évidence le caractère unificateur des espaces vectoriels. Les types de tâches impliqués sont donc proches de ceux qui sont rencontrés dans le dispositif « espaces vectoriels ». Dans un soucis de clarté, pour l'analyse a priori des trois dernières questions du dispositif « Matrices », nous renvoyons le lecteur au § 3.3 intitulé 'Dispositif « Espaces vectoriels »' ci-après. Remarquons qu'en plaçant ces trois questions à la fin du dispositif « Matrices », un exemple supplémentaire est apporté au répertoire d'espaces vectoriels à destination des étudiants.

3.3. Dispositif « Espaces vectoriels »

Le dispositif que nous nous proposons de décrire ici a été conçu pour illustrer le caractère unificateur des notions d'algèbre linéaire, et proposer ainsi un répertoire minimum d'exemples d'espaces vectoriels aux étudiants. De plus, en proposant un espace vectoriel fonctionnel, ce dispositif aide aussi à considérer la notion de fonction, détachée de ses représentations.

Méthodologie

La mise en œuvre de ce dispositif fut possible par l'intermédiaire des travaux de groupe, inscrits au programme des élèves de première année de bacheliers *mathématiques* à l'université de Namur. Le travail de groupe d'algèbre linéaire a été distribué aux étudiants début octobre 2008, peu de temps après la rentrée académique. Les étudiants, répartis en six groupes de quatre ou cinq, disposaient du mois d'octobre pour rendre un rapport écrit sur le travail demandé (un rapport par groupe). Il leur était recommandé de consulter un assistant au cours des deux premières semaines de leur travail ; et une entrevue (variant de 30 à 60 minutes) était obligatoire après la remise du travail (début novembre 2008).

Le travail de groupe ayant été proposé rapidement après la rentrée académique, les étudiants n'avaient encore abordé, lors de sa distribution, que le premier chapitre du cours d'algèbre linéaire (Toint 2007). Ce premier chapitre concerne les structures algébriques, les notions de dépendance linéaire et dimension, et les sous-espaces vectoriels. Ce chapitre était pratiquement terminé (voir Annexe 8) au cours théorique lors de la distribution du travail de groupe. Par contre, à ce moment, seules les structures algébriques avaient été travaillées en travaux dirigés. Au moment de la remise du travail de groupe (fin octobre 2008), le cours théorique avait en plus abordé les applications linéaires, les transformations linéaires, les matrices associées aux transformations et applications linéaires, les changements de base et les formes linéaires, sans toutefois avoir été jusqu'à la présentation du dual. Les travaux dirigés avaient été donnés sur la matière du premier chapitre, et les étudiants de première année mathématique y avaient aussi abordé les applications linéaires (au niveau micro, voir § 1.2.c).

Présentation et analyse a priori

Le lecteur trouvera ci-dessous l'énoncé du travail de groupe « espaces vectoriels » dont nous présentons ensuite l'analyse a priori.

Enoncé du dispositif «Espaces vectoriels »

1$^{\text{ère}}$ BAC Mathématiques Octobre 2008

Travail de groupe d'ALGEBRE

Les espaces vectoriels

Question 1 :

Si l'on appelle *vecteur* un élément d'un *espace vectoriel*, peut-on dire :

a) qu'un 4-uplet (x, y, z, t) est un vecteur (avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$)?

b) qu'une matrice rectangulaire à 2 lignes et 3 colonnes $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ est un vecteur (avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$) ?

c) qu'un couple (x, y) appartenant à la droite d'équation $2x - y = 4$ est un vecteur ?

d) qu'une équation homogène linéaire à 4 inconnues $ax + by + cz + dt = 0$ est un vecteur (où a, b, c, d sont des coefficients réels et $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ sont les inconnues) ?

e) qu'une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est un vecteur ?

Si oui, pourquoi ? Décrivez explicitement, pour ceux qui sont des *vecteurs*, l'espace vectoriel (ou le sous-espace vectoriel) auquel ils appartiennent. Justifiez.

Si non, pourquoi ?

Question 2 :

a) Peut-on dire que les 4-uplets $(2,1,-1,5)$, $(-1,2,3,4)$ et $(1,0,-1,5)$ sont linéairement indépendants ?

b) Peut-on dire que les 4-uplets $(2,1,-1,5)$, $(-1,2,3,4)$ et $(10,0,-16,4)$ sont linéairement indépendants ?

c) Peut-on dire que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes ?

d) Peut-on dire que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes ?

e) Peut-on dire que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes ?

f) Peut-on dire que les couples (1,-2) et (3,2) appartenant à la droite d'équation $2x - y = 4$ sont linéairement indépendants ?

g) Peut-on dire que les équations linéaires homogènes $3x + 4y - z + t = 0$ et $2x - y + 2z - t = 0$ sont linéairement indépendantes ?

h) Peut-on dire que les équations linéaires homogènes $3x + 4y - z + t = 0$, $2x - y + 2z - t = 0$ et $-x + 6y - 5z + 3t = 0$ sont linéairement indépendantes ?

i) Soient $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $f_1(x, y) = 4x^2 - y$ et $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $f_2(x, y) = 4x - y$.

Peut-on dire que les applications f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes ?

j) Soient $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $f_1(x, y) = 4x^2 - y$; $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $f_2(x, y) = 4x - y$ et $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $f_3(x, y) = 12x(x-1)$.

Peut-on dire que les applications f_1, f_2 et f_3 sont linéairement indépendantes ?

Question 3 :

Pour chacun des items de la question 2 ci-dessus, exprimez, lorsque cela est possible, un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres.

Question 4 :

Pour chacun des espaces vectoriels que vous aurez défini à la question 1 de ce travail, donnez-en la dimension et, si celle-ci est finie, donnez une base de l'espace vectoriel considéré.

Question 5 :

Donnez deux exemples d'espace vectoriel, différent(s) de ceux que vous avez explicités à la question 1 (n'oubliez pas d'en définir les lois).

Analyse a priori du dispositif «Espaces vectoriels »

Le but de ce travail de groupe est de fournir aux étudiants de première année un répertoire minimum d'exemples d'espaces vectoriels. Ce faisant, nous mettons en place différents cadres qui serviront à introduire la notion de dualité. Nous nous situons donc dans le secteur « espaces vectoriels » de l'algèbre linéaire.

Nous présentons les cadres que nous avons l'intention d'introduire par l'intermédiaire de ce dispositif, et les raisons qui nous y ont amenée :

- Le cadre des 4-uplets ($\mathbb{R}^4$) : il s'agit d'un cadre algébrique, proche du cadre géométrique de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, tout en étant plus abstrait parce que plus difficile à se représenter par des images mentales. Cependant, les composantes des éléments de $\mathbb{R}^4$ sont facilement identifiables, puisqu'elles sont séparées par des virgules dans les 4-uplets ;
- Un cadre matriciel, particularisé aux matrices rectangulaires 2 lignes, 3 colonnes ($\mathcal{M}_{2x3}$) : la grande majorité des étudiants ont déjà travaillé le calcul matriciel dans l'institution enseignement secondaire. Il s'agit donc d'un cadre que l'on peut considérer comme

connu. Il s'agit maintenant de rattacher ces objets aux nouvelles notions introduites dans le cours d'algèbre linéaire ;

- Le cadre des équations linéaires : nous l'avons particularisé aux équations linéaires homogènes à quatre inconnues. Vue l'importance historique de ce cadre dans l'émergence des notions d'algèbre linéaire (Dorier 2000), et en particulier dans l'aspect naturel de la dualité, il est important que les étudiants puissent s'y référer dans le domaine de l'algèbre linéaire ;

- Un cadre fonctionnel, que nous avons particularisé aux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: étant donné que le dispositif « Espaces vectoriels » s'inscrit dans un dispositif plus global ayant pour objectif l'introduction de la dualité, il nous semble essentiel que les étudiants puissent concevoir des fonctions comme éléments d'un espace vectoriel. En effet, les formes linéaires, éléments d'un espace vectoriel dual, ne sont finalement que des fonctions particulières. Il est important que les étudiants puissent les manipuler comme des « vecteurs », c'est-à-dire comme des éléments d'un espace vectoriel. L'introduction du cadre fonctionnel dans le travail de groupe permet de travailler aussi la notion de fonction détachée de ses représentations (voir § 1.1.a) ;

- Un cadre affine, que nous particularisons à un *sous*-ensemble de $\mathbb{R}^2$: il est important que les exemples proposés ne soient pas tous des espaces vectoriels. En effet, si la diversité des exemples d'espaces vectoriels est importante, le rôle des contre-exemples est tout aussi intéressant. Nous avons choisi ici un exemple géométrique (droite affine) pour la possibilité de représentation mentale qu'il offre.

La première question de ce travail de groupe est divisée en sous-questions contextualisées dans les différents cadres proposés ci-dessus. Dans chacun de ces cadres, nous demandons si on peut appeler « vecteur » les différents éléments proposés : un 4-uplet, une matrice rectangulaire, un point appartenant à une droite affine, une équation linéaire homogène à quatre inconnues, une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Bien entendu, dans l'affirmative, les étudiants doivent justifier leur réponse en explicitant l'espace vectoriel considéré, en en définissant donc explicitement l'ensemble des éléments, le champ, les lois d'addition et de multiplication par un scalaire. Remarquons que le type de tâches proposé ici aux étudiants est typique de l'institution université : une grande autonomie est requise : les lois d'addition et de multiplication par un scalaire ne sont pas données, elles sont à découvrir. Les étudiants doivent faire preuve d'initiative (Robert 1998).

Précisons que cette première question est inspirée d'une question présente dans un enseignement expérimental mis en place à Lille (Rogalski 1991) dans lequel les étudiants étaient invités à réfléchir à la question suivante : « Une fonction est-elle un vecteur ? ».

L'utilité d'avoir défini correctement les lois associées aux espaces vectoriels répertoriés à la première question va être démontrée dans la deuxième question de ce travail de groupe, qui fait travailler les étudiants sur la notion de dépendance linéaire dans ces espaces. La deuxième question est aussi composée de sous-questions présentant des éléments particuliers des différents espaces, et demandant chaque fois si ces éléments sont linéairement dépendants ou indépendants. Lorsque l'espace considéré est un espace vectoriel, les étudiants doivent donc pouvoir écrire et interpréter dans le cadre considéré la relation $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$, où les α_i sont des scalaires, les x_i les « vecteurs » donnés dans la sous-question, et le « 0 » le vecteur nul de l'espace considéré. Après la contextualisation de cette relation, une partie davantage calculatoire doit prendre place, avant de pouvoir mener à la réponse. Cette question oblige donc les étudiants à prendre conscience de la portée des notations utilisées : les vecteurs x_i considérés au cours théorique ne désignent pas uniquement des n-uplets, mais peuvent représenter des éléments beaucoup plus diversifiés, telles des équations ou des applications. Le caractère unificateur des notions d'algèbre est donc encore illustré, motivant ainsi l'introduction d'un nouveau langage plus formel que celui adopté jusqu'à présent dans l'institution de l'enseignement secondaire. En considérant la simplicité apparente de la relation $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$, on illustre aussi le caractère simplificateur des notions considérées.

Le travail de groupe se poursuit ensuite par une troisième question, invitant les étudiants à exprimer, pour chacune des sous-questions présentes à la question précédente lorsque cela est possible, un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres. Cette question oblige les étudiants à prendre du recul par rapport à la phase calculatoire qu'ils ont dû mettre en place pour répondre à la deuxième question. Ils doivent ici pouvoir interpréter les résultats trouvés à la question précédente. Pour ce faire, ils sont obligés de considérer les différents vecteurs comme des objets (Douady 1986) à part entière. Par exemple, une combinaison linéaire entre trois fonctions f_1, f_2, f_3 s'écrit comme $f_2 = 5f_2 - 7f_3$, sans que l'on ne doive forcément expliciter ce que sont f_1, f_2, f_3 (analytiquement par exemple).

Pour compléter le travail sur les espaces vectoriels, nous invitons les étudiants, en quatrième question, à donner la dimension des espaces vectoriels identifiés à la première question. Et, lorsque celle-ci est finie, les étudiants doivent en donner une base. Même si le cours d'algèbre linéaire proposé aux étudiants de math-physique à Namur est uniquement consacré aux espaces vectoriels de dimension finie, il est intéressant que ces étudiants se rendent compte de la portée des notions étudiées. Ainsi, l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ étant de dimension infinie, il n'est pas possible d'en donner une base au même titre que pour les autres espaces identifiés à la première question.

Enfin, le travail de groupe se termine en demandant aux étudiants de donner deux exemples d'espaces vectoriels différents de ceux explicités à la première question. Nous espérons ainsi augmenter le répertoire d'exemples d'espaces vectoriels pour les étudiants participant au travail de groupe.

3.4. Dispositif « Applications »

Le dispositif « Espaces vectoriels », décrit à la section précédente, prenant place dans le cadre des travaux de groupe destinés uniquement aux étudiants de *mathématique*, il était important de proposer aux étudiants inscrits en *physique* (qui suivent le même cours d'algèbre linéaire) un dispositif permettant de considérer la notion de fonction, détachée de ses représentations (voir § 1.1.a), et de leur proposer par la même occasion un exemple d'espace vectoriel.

Le but de ce dispositif est donc double : d'une part dégager l'objet « application » de ses différentes représentations (graphes, diagrammes de Venn, image d'un élément, etc.), afin que les étudiants puissent percevoir les applications comme éléments d'un ensemble ou d'un espace vectoriel. D'autre part, nous enrichissons ainsi leur répertoire d'exemples d'espaces vectoriels. Remarquons que nous utilisons aussi bien les termes « fonctions » qu' « applications », étant donné que toutes les fonctions considérées ici sont des applications.

Rappelons que l'existence de ce dispositif est motivée par le fait que les éléments d'un espace vectoriel dual sont des applications particulières (formes linéaires). Or, la notion de fonction a créé dans l'histoire des mathématiques une véritable rupture épistémologique (chapitre 2, § 1). Il peut donc être difficile pour les étudiants novices en algèbre linéaire de manipuler les applications en tant qu'objet (Douady 1986). De plus, nous nous souvenons que les étudiants qui sont ici confrontés à l'enseignement de la dualité ont également effectué un changement d'institution, et que l'objet « fonction » n'est pas perçu de la même façon dans l'institution enseignement secondaire, que dans l'institution enseignement université (chapitre 1, § 1.5).

Méthodologie

Le dispositif d'enseignement « Applications » a été proposé en deux fois (pour des contraintes horaires) aux étudiants de première année *physique*, lors de séances tremplin. La première séance (question 1) a eu lieu le mercredi 22 octobre 2008 et la deuxième séance (questions 2, 3 et 4) le vendredi 31 octobre 2008. Pour proposer ces séances aux étudiants de physique, nous avons profité d'une semaine où ces étudiants n'avaient pas exprimé, dans les groupes-dialogue (§ 2.2), de demande spécifique en algèbre linéaire. Il s'agissait donc d'une activité libre (non obligatoire) proposée aux 39 étudiants inscrits en 1ère année en physique. Une vingtaine d'étudiants étaient présents lors de ces séances.

Au moment où l'activité a été proposée aux étudiants, ces derniers ont déjà vu au cours théorique et en travaux dirigés les espaces vectoriels (structures algébriques, dépendance linéaire et dimension, sous-espaces vectoriels) ; et en, théorie uniquement, les applications linéaires (isomorphisme, noyau, image), transformations linéaires et le début de la section « matrices et transformations linéaires ».

L'activité « Applications » se déroule donc dans le cadre de l'opération tremplin. Les étudiants sont répartis en groupes de 3 ou 4, et sont invités à répondre aux questions proposées dans le dispositif pendant 35 minutes. Une mise en commun est ensuite réalisée pendant les 25 minutes restantes. Après la première séance (une heure), seule la première question proposée (voir 'Enoncé du dispositif « Applications »') a été travaillée. Les étudiants ont donc été invités à travailler les trois autres questions à domicile (ou en groupe de travail) et à revenir pour la correction de leurs réponses lors d'une prochaine séance tremplin. Ce découpage de l'activité « Applications » n'a pas posé de problème aux étudiants.

Présentation et analyse a priori

Le dispositif « Applications » est constitué d'un questionnaire comportant quatre questions que nous présentons et analysons ici.

Enoncé du dispositif « Applications »

1ère BAC Physique 22 octobre 2008

Tremplin d'ALGEBRE

Les applications

<u>Question 1 :</u>

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Est-ce que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $f(x,y) = x + y$ appartient à $\mathcal{F}$?

Est-ce que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (x + y , x - y)$ appartient à $\mathcal{F}$?

Est-ce que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $f(x,y) = \sin(x) + y^2 - 3$ appartient à $\mathcal{F}$?

Est-ce que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \sin(x) - 3$ appartient à $\mathcal{F}$?

Est-ce que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $f(x,y) = \sin(x) - 3$ appartient à $\mathcal{F}$?

Si on considère que x et y appartiennent à $\mathbb{R}$, à quel ensemble appartient $(3x + y)$?

Si on considère que x et y appartiennent à $\mathbb{R}$ et que f appartient à $\mathcal{F}$, à quel ensemble appartient $f(x, y)$?

Si on considère que x et y appartiennent à $\mathbb{R}$, à quel ensemble appartient $(3x, -y)$?

Si on considère que x et y appartiennent à $\mathbb{R}$, et que $f(x, y) = 2x\text{-}3y$, à quel ensemble appartient f ?

Qu'est-ce qui, selon vous, caractérise un élément de $\mathcal{F}$? Autrement dit, que doit-on vérifier pour pouvoir dire qu'un élément appartient à $\mathcal{F}$, et qu'est-ce qui permettra de différencier deux éléments de $\mathcal{F}$ entre eux ?

Si x appartient à $\mathbb{R}$, y a-t-il une différence, selon vous, entre « sin » et « sin(x) » ?

<u>Question 2 :</u>

Si l'on appelle *vecteur* un élément d'un *espace vectoriel*, peut-on dire qu'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est un vecteur ?

Si oui, pourquoi ? Décrivez explicitement l'espace vectoriel $\{\boldsymbol{E}, \{\boldsymbol{K}, +, *\}, \#, .\}$ auquel il appartient, en explicitant ce qu'est $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{K}, +, *, \#, .$

Si non, pourquoi ?

<u>Question 3 :</u>

a) Soient $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $f_1(x,y) = 4x^2 - y$ et $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $f_2(x,y) = 4x - y$. Peut-on dire que les applications f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes ?

b) Soient $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $f_1(x,y) = 4x^2 - y$; $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $f_2(x,y) = 4x - y$ et $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq $f_3(x,y) = 12x(x-1)$. Peut-on dire que les applications f_1, f_2 et f_3 sont linéairement indépendantes ?

<u>Question 4 :</u>

Pour chacun des items de la question 3 ci-dessus, exprimez, lorsque cela est possible, un des *vecteurs* comme combinaison linéaire des autres.

Analyse a priori du dispositif «Applications »

La première question présente dans ce dispositif a pour but d'aider les étudiants à détacher l'objet fonction de ses représentations. Lorsque nous abordons la dualité, la représentation analytique des formes linéaires sera utilisée (par exemple dans la détermination de bases duales, dans la détermination d'une application transposée, etc.). C'est pourquoi la première question de ce dispositif travaille essentiellement ce type de représentation de fonction.

Dans cette première question, nous considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Considérer un ensemble d'applications est relativement nouveau pour les étudiants. De plus, alors que dans l'institution enseignement secondaire, ce sont pratiquement toujours des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont considérées, nous nous intéressons ici à des applications dont l'espace de départ n'est pas le même que l'espace d'arrivée. Nous conservons quand même $\mathbb{R}$ comme espace d'arrivée, en référence aux *formes* que nous envisagons par la suite dans la dualité. Nous posons ensuite différentes questions aux étudiants concernant l'appartenance ou la non-appartenance d'objets à cet ensemble ou d'autres ensembles impliqués. Le but de cette première question est de faire prendre conscience aux étudiants qu'une application f est un *triplet* composé d'un ensemble de départ, d'un ensemble d'arrivée et d'un graphe décrivant la façon dont les éléments du domaine de l'application sont mis en relation avec les éléments de l'ensemble d'arrivée. Nous voulons aussi amener les étudiants à *se détacher des notations* lorsqu'ils envisagent des fonctions.

Analysons maintenant chacune de ces sous-questions :

- Est-ce que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $f(x,y) = x + y$ appartient à $\mathcal{F}$?

  Ici, comme dans plusieurs sous-questions après, nous demandons si une fonction donnée appartient à l'ensemble fonctionnel défini. Nous commençons dans cette sous-question par proposer un exemple d'éléments de $\mathcal{F}$. Il est essentiel que les étudiants perçoivent que des fonctions peuvent ne pas avoir le même espace de départ et d'arrivée, alors qu'ils ont été habitués, dans l'institution enseignement secondaire, aux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Est-ce que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (x + y , x - y)$ appartient à $\mathcal{F}$?

  En proposant $\mathbb{R}^2$ comme espace d'arrivée pour la fonction f ici présente, nous voulons que les étudiants prennent conscience que l'espace d'arrivée est un constituant essentiel de la fonction considérée.

- Est-ce que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $f(x,y) = \sin(x) + y^2 – 3$ appartient à $\mathcal{F}$?

- Est-ce que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \sin(x) – 3$ appartient à $\mathcal{F}$?

- Est-ce que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $f(x,y) = \sin(x) – 3$ appartient à $\mathcal{F}$?

  Nous avons varié ici les applications proposées (espaces de départ ou expression analytique) de façon à ce que les étudiants puissent repérer les éléments discriminants d'une application.

- Si on considère que x et y appartiennent à $\mathbb{R}$, à quel ensemble appartient $(3x + y)$?

  Dans cette question, bien que nous manipulions des variables réelles, il n'apparaît explicitement aucune fonction. Le but de cette question est d'amener les étudiants à comprendre qu'une expression ne contenant que des variables réelles constitue aussi un élément réel.

- Si on considère que x et y appartiennent à $\mathbb{R}$ et que f appartient à $\mathcal{F}$, à quel ensemble appartient $f(x, y)$?

  Le but de cette question est d'amener les étudiants à faire la distinction entre un élément f d'un ensemble de fonction ($\mathcal{F}$) et une notation impliquant cet élément : $f(x, y)$. Pour répondre correctement à cette question, les étudiants doivent réaliser que si deux variables interviennent dans la notation $f(x, y)$, cela n'en fait pas pour autant un élément de $\mathbb{R}^2$. Pour répondre à la question posée, les étudiants doivent se tourner vers un des trois éléments constitutifs de la fonction f, l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$ en l'occurrence.

- Si on considère que x et y appartiennent à $\mathbb{R}$, à quel ensemble appartient $(3x, -y)$?

  En posant cette question, nous voulons habituer les étudiants à la réflexion lorsqu'ils sont confrontés à des expressions mathématiques. Ce n'est pas parce que l'on manipule des variables réelles que l'on se retrouve obligatoirement dans les réels. Nous sommes ici dans $\mathbb{R}^2$.

- Si on considère que x et y appartiennent à $\mathbb{R}$, et que $f(x, y) = 2x\text{-}3y$, à quel ensemble appartient f ?

  Après avoir proposé diverses questions dans lesquelles les étudiants ont dû examiner attentivement les objets impliqués avant de pouvoir donner leur ensemble d'appartenance, nous voulons vérifier s'ils sont capables d'appliquer le même raisonnement pour une fonction.

- Qu'est-ce qui, selon vous, caractérise un élément de $\mathcal{F}$? Autrement dit : que doit-on vérifier pour pouvoir dire qu'un élément appartient à $\mathcal{F}$ et qu'est-ce qui permettra de différencier deux éléments de $\mathcal{F}$ entre eux ?

  En explicitant la question posée à l'aide des deux sous-questions, nous guidons les étudiants vers la reconnaissance des trois éléments définissant une fonction. Remarquons qu'une définition en ce sens est donnée dans les premières pages du cours d'algèbre linéaires (Toint 2007), mais qu'elle n'est généralement pas adoptée par les étudiants.

- Si x appartient à $\mathbb{R}$, y a-t-il une différence, selon vous, entre « sin » et « sin(x) » ?

  Cette dernière sous-question posée met en œuvre une fonction connue des étudiants, et non plus une fonction générique baptisée « f ». Nous invitons donc les étudiants à un raisonnement sur des fonctions qu'ils connaissent de par leur passage dans l'institution enseignement secondaire, et pour lesquelles des représentations graphiques sont généralement associées (forme analytique, graphique, cercle trigonométrique, valeurs remarquables, etc.).

Avec cette première question (constituée de plusieurs sous-questions), nous espérons avoir suffisamment dégagé l'objet « fonction » de ses représentations dans les conceptions des étudiants. Les autres questions présentes dans le dispositif « Applications » s'attachent à présenter un exemple d'espace vectoriel fonctionnel aux étudiants, construit sur base de l'ensemble des applications allant de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Le canevas des questions qui suivent se rapproche donc assez fort de celui présenté dans le dispositif « Espaces vectoriels », mais ne concerne ici que le cadre fonctionnel.

Dans la deuxième question, on demande aux étudiants si on peut dire qu'une application allant de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est un vecteur, c'est-à-dire un élément d'un espace vectoriel. On demande ensuite aux étudiants de préciser les lois qui le permettent. Le but de cette question est que les étudiants se rendent compte que l'on peut considérer des espaces vectoriels de fonctions. Il s'agit d'une étape essentielle dans la conception du dual d'un espace vectoriel donné.

Pour cette deuxième question, nous nous sommes encore inspirée d'un atelier proposé par Rogalski dans un enseignement expérimental qu'il a proposé à Lille (Rogalski 1991) où les étudiants étaient confrontés à la question « une fonction est-elle un vecteur ? ».

Evidemment, la tâche proposée aux étudiants leur laisse beaucoup d'autonomie. Il s'agit de nouveau d'une tâche spécifique à l'institution université, qui requiert de l'autonomie et des initiatives de la part des étudiants, alors qu'ils n'y sont pas encore habitués. De plus, les étudiants sont ici obligés de travailler des praxéologies complètes, étant donné que le bloc technologico-théorique est un passage obligé pour la justification du choix des lois d'addition et de multiplication de l'espace vectoriel. Nous pouvons donc nous attendre à une difficulté relevant du premier type de transition décrit par Winsløw.

La réponse à cette deuxième question permet, de plus, d'illustrer le caractère unificateur des espaces vectoriels : on peut utiliser un vocabulaire commun aux vecteurs géométriques ou algébriques (auxquels les étudiants ont déjà été confrontés) et aux applications. Cet aspect unificateur sera davantage exploité dans les deux dernières questions du dispositif « Applications » que nous présentons maintenant.

La troisième question de ce dispositif comporte deux parties, pratiquement identiques, à ceci près que la première partie ne met en jeu que deux applications particulières, alors que la deuxième partie en présente trois. Les applications sont données sous leur forme analytique explicite. On demande si elles sont linéairement indépendantes. Dans la quatrième question, on demande d'exprimer, lorsque cela est possible, un des « vecteurs » comme combinaison linéaire des autres.

Les questions 3 et 4 demandent, pour être résolues, de pouvoir considérer les applications comme des éléments d'un espace vectoriel. La distinction entre l'objet « application » et ses représentations doit avoir été réalisée au préalable, sans quoi il est difficile de pouvoir considérer une fonction comme un vecteur. De plus, les concepts de dépendance et de combinaison linéaires sont mobilisés. Les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire sont alors illustrés.

3.5. Dispositif « Formes linéaires et dual »

Le dispositif présenté ici correspond davantage à une proposition d'activité qui a pour but d'introduire la notion de forme linéaire, de dual et de crochet de dualité. Nous introduisons pour les étudiants les niveaux « micro-macro » (§ 1.2.c), interprétés par le didacticien par des changements d'appartenance à des secteurs (Chevallard 2007).

Méthodologie

L'activité proposée dans ce dispositif a été mise en place dans le cadre de l'opération tremplin à la fois pour les étudiants de mathématique et pour les étudiants de physique. Une séance tremplin (une heure) spécifique à chacune de ces sections a été organisée à cette fin (5 et 7 novembre 2008 ; 2 et 7 décembre 2009), de façon à travailler en plus petits groupes, l'organisation des séances tremplin le permettant. Cette activité est une séance interactive entre l'enseignant et les étudiants. Il n'y a pas de questionnaire spécifique prévu, mais plutôt un canevas pour un cours faisant interagir les étudiants avec le remédiateur (§ 2.2).

Des prérequis sont nécessaires à cette activité. Ainsi, il faut que la notion d'espace vectoriel ait été présentée aux étudiants, comme une notion unificatrice, donc avec des exemples divers. De plus, les étudiants doivent avoir abordé la notion d'application linéaire entre espaces vectoriels, avec les sujets afférents (noyau, image, représentation matricielle, etc.). Il est aussi important qu'une fonction (ou application) puisse être perçue comme un élément d'un espace vectoriel (fonctionnel), c'est-à-dire comme un vecteur (voir dispositif « Espaces vectoriels » ou « Applications »). Tous ces prérequis avaient été rencontrés par les étudiants qui ont participé à l'activité « Formes linéaires et dual » (voir Annexe 8).

Nous présentons l'activité « Formes linéaires et dual » comme une activité d'*introduction* aux notions de forme linéaire et de dual. Cependant, ces notions avaient été présentées aux étudiants dans le cadre du cours théorique avant la mise en œuvre de l'activité[62] dans le cadre de l'opération tremplin. Les travaux dirigés n'avaient quant à eux pas encore abordé ces notions.

Présentation et analyse a priori

Le but de l'activité « Formes linéaires et dual » est donc d'introduire les notions de forme linéaire et de d'espace dual, en tant que thèmes du secteur dualité. Nous souhaitons donc introduire les niveaux micro-macro pour les applications (voir § 1.2.c), que nous particularisons ensuite aux formes linéaires. L'introduction des crochets de dualité peut aussi prendre place en fin d'activité.

Pour rappel, une application linéaire est considérée, au niveau *micro*scopique, comme appartenant au secteur « applications linéaires » du domaine de l'algèbre linéaire : l'application transforme les éléments d'un espace vectoriel (de départ) en éléments d'un espace vectoriel (d'arrivée), éventuellement différent du premier. On peut alors lui associer une matrice ; calculer son noyau, son image ; faire la composition de deux applications linéaires si les espaces d'arrivée et de départ coïncident, etc. Si on se positionne au niveau *macro*scopique, on se situe alors dans le secteur « espaces vectoriels » : on considère alors une application linéaire comme un « vecteur », un élément d'un espace vectoriel : l'ensemble des applications linéaires, muni du champ des réels ou des complexes, de l'addition de deux applications et de la multiplication d'un scalaire par une application, définit un espace vectoriel : l'*espace vectoriel des applications linéaires*. On peut alors additionner deux applications linéaires, multiplier une application linéaire par un scalaire, trouver une base de cet espace vectoriel s'il est de dimension finie, etc.

L'activité peut être présentée en quatre parties : tout d'abord, il s'agit de préciser aux étudiants ce que nous entendons par niveaux micro-macro. Nous nous proposons de le faire dans un cadre connu des étudiants : les systèmes d'équations linéaires. Il s'agit, après, de montrer que les niveaux micro-macro s'appliquent aussi aux applications linéaires. On particularise ensuite aux transformations linéaires et formes linéaires. De cette dernière particularisation découlera naturellement la notion d'espace vectoriel dual. Et pour terminer, on peut introduire, si on le souhaite la notation des crochets de dualité (voir § 1.2.b). Nous présentons maintenant plus en détail chacune des parties de l'activité, en les motivant.

Etablir les niveaux micro-macro dans le cadre des systèmes d'équations linéaires

Le but de cette première partie de l'activité « Formes linéaires et dual » est de montrer qu'un même objet peut revêtir différents niveaux selon la façon dont on le considère ; nous parlons alors de niveau micro ou macro. Etant donnée la rupture épistémologique créée par la notion de fonction dans l'histoire des mathématiques, nous ne voulons pas introduire les notions de niveaux micro-macro dans un cadre fonctionnel. Pour ce faire, nous nous proposons de nous placer dans le cadre (historique) des systèmes d'équations linéaires. En effet, dans l'institution enseignement secondaire, les étudiants ont déjà travaillé avec des équations linéaires aux niveaux micro et macro. Nous nous servons donc de situations connues par eux pour introduire de nouvelles notions (niveaux micro-macro) dont nous nous servirons ensuite pour introduire le secteur dualité.

Nous présentons maintenant une proposition d'introduction des niveaux micro-macro dans le cadre des systèmes d'équations linéaires :

[62] En 2008, le cours théorique introduisant les formes linéaires et le dual s'était donné une semaine avant la mise en place de l'activité ; en 2009, il s'était donné deux semaines avant.

Considérons un système d'équations linéaires à 4 inconnues : (1) $\begin{cases} 4x-2y+2z-7t=3 & (e_1) \\ 2x-5y-5z-2t=1 & (e_2) \\ 5x-2y+3z-3t=4 & (e_3) \end{cases}$

Volontairement, nous ne considérons pas un système carré (mêmes nombres d'équations que d'inconnues), ceci afin de nous placer dans une situation plus générale, sans toutefois être trop formelle : nous n'utilisons pas de lettres a_{ij} pour représenter les coefficients. Nous leur préférons des nombres, de telle manière que les étudiants se retrouvent dans des conditions familières, c'est-à-dire généralement présentes dans l'institution enseignement secondaire.

A partir de la situation ainsi introduite, nous pouvons maintenant définir les deux niveaux que nous souhaitons présenter. Pour ce faire, nous expliquons que nous pouvons attribuer à chaque équation présente dans le système (1) deux niveaux différents :

- <u>Niveau micro d'une équation</u> : Dans chaque équation présente dans le système (1), on prend en considération les éléments constitutifs de l'équation : on considère les coefficients, les inconnues que l'on va s'appliquer à trouver, le terme indépendant, etc. On peut « injecter » de l'information contenue dans une équation dans une autre équation, en manipulant les éléments constitutifs des équations (coefficients, inconnues, etc.). Par exemple, de la première équation e_1 du système (1), on peut dire que $x=\frac{1}{4}(2y-2z+7t+3)$; en injectant cette information dans la deuxième équation e_2 du système (1), l'équation e_2 devient alors : $2\underbrace{\left(\frac{1}{4}(2y-2z+7t+3)\right)}_{x}-5y-5z-2t=1$, ce qui après calculs donne : $-4y-6z+\frac{3}{2}t=-\frac{1}{2}$. On dira qu'on se situe au niveau micro des équations linéaires, étant donné qu'on en a une vision « de près », permettant de manipuler directement les éléments constitutifs des équations.

Un autre regard peut être posé sur une équation, même s'il s'agit toujours des mêmes objets. Nous le présentons maintenant :

- <u>Niveau macro d'une équation</u> : Chaque équation présente dans le système (1) va être considérée comme un objet à part entière, comme une entité, un tout que l'on regarde de loin en quelque sorte. On oublie alors que chacune de ces équations contient un membre de gauche, un membre de droite, des coefficients et des inconnues qui sont à déterminer. Une équation particulière est considérée comme un tout, que l'on va pouvoir par exemple additionner à une autre équation ou multiplier par un scalaire. Détaillons par exemple la manière dont nous pourrions additionner deux de ces objets « équations » : il faut se munir d'une règle (« + ») définie au préalable : on additionne les membres de gauche ensemble, et on additionne les membres de droite ensemble. On obtient ainsi un nouvel objet « équation », résultant de la somme des deux équations prises au départ. C'est ce que l'on fait lorsqu'on transforme le système d'équations (1) en : (2) $\begin{cases} 8y+12z-3t=1 & (q_1) \\ 2x-5y-5z-2t=1 & (q_2) \\ 5x-2y+3z-3t=4 & (q_3) \end{cases}$.

  En effet, la différence entre le système (1) et le système (2) est que dans ce dernier système, la première équation du système initial, e_1, a été remplacée par la première (e_1) moins deux fois la deuxième (e_2). On peut dire que $q_1 = e_1 - 2e_2$, si e_1 et e_2 représentent respectivement la première et deuxième équation du système initial (1), et q_1 la première équation du deuxième système (2).

En agissant ainsi, on considère les équations « de loin » : on oublie en quelque sorte que les équations considérées contiennent des inconnues que l'on souhaiterait déterminer. On s'intéresse uniquement aux calculs qu'on pourrait faire sur ces équations, considérées comme des entités à part entières (comme par exemple faire des combinaisons linéaires d'équations, c'est-à-dire des additions d'équations, éventuellement préalablement multipliées par un scalaire). Bien entendu, les combinaisons linéaires entre équations ne sont pas faites au hasard, et sont motivées par la résolution du système, mais cette motivation n'intervient pas dans la technique nécessaire pour réaliser les combinaisons linéaires d'équations. Ce faisant, les équations linéaires sont considérées à un niveau macro. Le didacticien dira qu'alors, on se trouve dans le secteur « espaces vectoriels ».

Etablir le niveau micro-macro pour les applications linéaires

Après avoir montré, dans un cadre connu des étudiants, qu'un même objet peut être considéré à deux niveaux différents, nous transférons ce principe aux applications linéaires.

- Niveau micro d'une application : une application linéaire est tout d'abord une *application*, c'est-à-dire un triplet composé d'un graphe, d'un espace de départ et d'un espace d'arrivée. Le caractère *linéaire* permet de préserver les combinaisons linéaires de l'espace vectoriel de départ E vers l'espace vectoriel d'arrivée G : $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$, où $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in K$ (le champ sur lequel est construit l'espace vectoriel E).

  Lorsqu'une application linéaire est considérée à ce niveau, on peut alors calculer son noyau, son image ; lui associer une matrice ; faire la composition de deux applications linéaires si les espaces d'arrivée et de départ le permettent, etc.

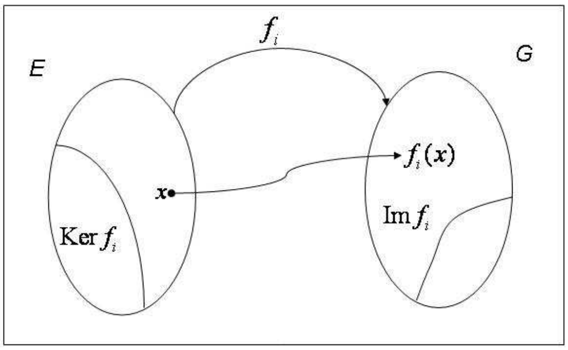


Figure 5-4 : Exemple du niveau micro d'une application linéaire f_i

- Niveau macro d'une application : à ce niveau, une application linéaire est perçue comme un « vecteur », un élément d'un espace vectoriel : l'ensemble des applications linéaires, muni du champ des réels ou des complexes, de l'addition de deux applications et de la multiplication d'un scalaire par une application, définit un espace vectoriel : l'*espace vectoriel des applications linéaires*. On peut alors additionner deux applications linéaires, multiplier une application linéaire par un scalaire, trouver une base de cet espace vectoriel s'il est de dimension finie, etc. On peut ainsi dire que $f_3 = 3f_2 - f_1$ avec $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f_1(x, y, z) = (2z, y-3z)$; $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f_2(x, y, z) = (2x-y+z, x+2y-z)$; $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f_3(x, y, z) = (6x-3y+z, 3x+5y)$.

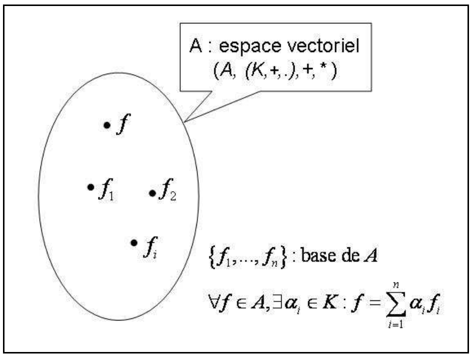


Figure 5-5 : Exemple du niveau macro des applications linéaires f_i

Particulariser aux transformations linéaires et formes linéaires

- Une **transformation linéaire** n'est rien d'autre qu'une application linéaire dont l'espace vectoriel de départ et d'arrivée sont les mêmes. Une transformation linéaire peut donc être perçue aux deux niveaux décrits.
- Une **forme linéaire** n'est rien d'autre qu'une application linéaire dont l'espace de départ est un espace vectoriel *E*, et dont l'espace d'arrivée est le champ *K* sur lequel est construit *E*, l'espace vectoriel de départ. Ce champ peut facilement être considéré comme un espace vectoriel construit sur lui-même. La considération d'une forme linéaire est donc possible aux deux niveaux décrits. Au niveau macro, on peut considérer que l'ensemble des formes linéaires constitue un espace vectoriel. Cet espace vectoriel s'appelle le dual de *E*, et est noté *E'*. En effet, les formes linéaires étant souvent utilisées et étudiées, on a préféré donner un nom spécifique à l'espace vectoriel des formes linéaires. Ainsi par exemple, le membre de gauche d'une équation linéaire peut être formalisé par une forme linéaire, un opérateur d'intégrale définie également, etc.

L'espace vectoriel dual est donc ainsi introduit. Bien entendu, ses éléments, s'ils sont considérés au niveau microscopique, ne sont pas des objets aussi simples que pourraient l'être des *n*-uplets, mais il n'en reste pas moins que les sujets (Chevallard 2007) introduits dans le secteur « espaces vectoriels » (niveau macro) peuvent leur être appliqués. On pourra ainsi parler de coordonnées pour une forme linéaire, de base pour l'espace vectoriel dual *E'*, etc.

Introduire la notation du crochet de dualité

Cette quatrième partie de l'activité « Formes linéaires et dual » est facultative (pour la motivation, voir § 1.2.b). Rappelons brièvement que le crochet de dualité, s'il est introduit, permettra, par exemple, d'exprimer aisément l'isomorphisme naturel existant entre le primal et le bidual ; d'introduire la notion de transposée ; de faire l'analogie, dans les espaces métriques, entre la transposée et l'application adjointe ; etc.

On peut par exemple adopter les notations proposées chez Halmos (1974) pour les crochets de dualité :

Soit une forme linéaire $\varphi : E \to K$, où *E* est un espace vectoriel construit sur le champ *K*. Pour exprimer l'image par φ d'un vecteur *x* de *E*, $\varphi(x)$, on adopte aussi la notation « $[x, \varphi]$ » où le « *x* » est placé en premier lieu dans le crochet de dualité [,] pour rappeler l'action qui est menée : « on prend *x* et on lui applique φ » (Halmos 1974, p.21). On peut aussi écrire *E*x*E'* en indice du crochet de dualité pour indiquer que le membre de gauche du crochet appartient à *E* et que le membre de droite du crochet appartient à *E'* : $[x, \varphi]_{E\times E'}$

Remarquons que pour être tout à fait conforme aux notations d'Halmos, nous devrions utiliser la notation « y » pour une forme linéaire à la place de la lettre « φ » : $y(x) \overset{not.}{=} [x, y]_{E\times E'}$. Cependant, le fait d'utiliser, *dans un premier temps*, un symbole généralement réservé aux applications (φ ou f) pour représenter une forme linéaire peut aider les étudiants à se rendre compte de la nature de l'objet manipulé (une application linéaire). Bien entendu, le formalisme présent en algèbre linéaire oblige les étudiants à acquérir une flexibilité d'écriture. C'est pourquoi, *par la suite*, une forme linéaire pourra aussi bien être notée y, φ, f, etc. Il est préférable que ce changement de notations soit opéré de manière explicite auprès des étudiants.

Si la notation du crochet de dualité est introduite, le principe de nécessité (Harel 2000) indique qu'il est utile d'en justifier l'utilisation pour les étudiants. Nous pouvons alors montrer que la notation des crochets de dualité permet déjà d'unifier dans les notations deux propriétés ou définitions déjà introduites, sous le vocable « bilinéarité du crochet de dualité » :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad \forall y \in E', \quad \forall \alpha, \beta \in K : \quad [\alpha x_1 + \beta x_2, y] = \alpha[x_1, y] + \beta[x_2, y] \tag{3}$$
$$\forall x \in E, \quad \forall y_1, y_2 \in E', \quad \forall \alpha, \beta \in K : \quad [x, \alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha[x, y_1] + \beta[x, y_2] \tag{4}$$

L'expression (3) exprime la linéarité de la forme linéaire y. Quant à l'expression (4), elle définit l'addition de deux formes linéaires (notées ici y_1 et y_2) ainsi que la multiplication d'une forme linéaire par un scalaire.

Les notations du crochet de dualité permettent également d'expliquer le nom donné au théorème de réflexivité (Figure 5-6). En effet, l'élément du primal, x, se « refête » dans le crochet de dualité à travers l'élément du dual, y, pour correspondre à l'élément du bidual, z, que lui associe l'isomorphisme canonique.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour toute forme linéaire z définie sur E' (c'est-à-dire $\forall z \in E''$), il existe un vecteur unique x dans E ($\exists! x \in E$) tel que $\forall y \in E'$: $[x,y]_{E\times E'} = [y,z]_{E'\times E''}$. De plus, la correspondance ainsi définie entre x et z est un isomorphisme.

Figure 5-6 : Théorème de réflexivité

Nous proposons en Annexe 9 une séquence pour l'illustration de ce théorème consécutive à une illustration des espaces vectoriels primal, dual et bidual.

3.6. Dispositif « Bases duales »

Suite à la constatation que, dans le polycopié du cours d'algèbre linéaire (Toint 2007) que possèdent les étudiants ayant participé aux enquêtes sur la dualité, ne se trouve présente que la finalité outil-analogie (chapitre 3, § 1) de la dualité, il nous a semblé important d'y introduire au moins une autre finalité outil. Ceci rejoint le « principe de nécessité » établi par Harel (2000). Ainsi, une proposition d'enseignement mettant en avant une finalité outil-résolution pour le thème des bases duales a été suggérée pour le cours théorique l'année académique 2009-2010.

Méthodologie

Le dispositif que nous présentons ici a été conçu pour introduire les bases duales dans l'enseignement de la dualité en MP1 (cours théorique). Nous l'avons proposé au professeur en charge du cours théorique l'année académique 2009-2010.

Pour pouvoir être mis en œuvre, ce dispositif demande qu'aient déjà été présentées les notions suivantes : les espaces vectoriels (structures algébriques, dépendance linéaire et dimension, sous-espaces vectoriels), les applications et transformations linéaires (noyau, image, matrices par rapport à des bases), les formes linéaires, l'espace vectoriel dual et la notation des crochets de dualité.

Nous avons réalisé une interview (enregistrée) du professeur à qui nous avons proposé le dispositif « Bases duales ». Nous avons assisté à tous les cours théoriques en MP1 où ont été présentées les notions de dualité lors de l'année académique 2009-2010, et avons pris des notes personnelles. Ces cours ont également été enregistrés. De plus, nous avons recueilli auprès de deux étudiants les notes relatives à ces cours. L'analyse de ces données sera effectuée dans la section correspondante (§ 4.2). Nous présentons maintenant le dispositif conçu et son analyse a priori.

Présentation et analyse a priori

Nous présentons brièvement ici la proposition d'enseignement que nous avons élaborée pour l'introduction des bases duales. Pour une présentation plus détaillée, nous invitons le lecteur à consulter l'Annexe 10, qui reprend ce que l'on peut considérer être l'extrait du polycopié associé au dispositif élaboré. Cet extrait est conçu pour s'insérer dans le cours d'algèbre linéaire dispensé en MP1, où, rappelons-le, seuls les espaces de dimension finie sont abordés.

La proposition d'enseignement concernant les bases duales que nous avons élaborée met en évidence une finalité outil de ce thème de la dualité, et plus particulièrement ce que nous avons appelé une finalité outil-résolution (chapitre 3, § 1). Nous présentons tout d'abord la notion de « formes coordonnées associées à une base d'un espace vectoriel *E* ». Pour ce faire, nous illustrons à l'aide d'un exemple, dans un cadre[63] non géométrique ni algébrique (de manière à éviter au maximum la confusion entre un vecteur et ses coordonnées dans une base), que les coordonnées d'un vecteur (en l'occurrence une matrice) dans une base donnée sont *fonction du* vecteur considéré (une matrice dans le cas de l'exemple donné). La généralisation est alors proposée dans un cadre générique[64], et nous introduisons par un jeu de notations suggérées par Pham & Dillinger (1996), la notation $y_j(v)$ pour représenter la $j^{\text{ème}}$ coordonnée d'un vecteur v dans une base de E donnée. Cette base de E est notée X = $\{x_1,...,x_n\} \overset{not.}{=} \{x_i\}_{i=1}^n$. Remarquons que la notation $\varphi_j(v)$ aurait été plus judicieuse que $y_j(v)$, dans un premier temps, pour indiquer ostensiblement qu'il s'agissait d'une fonction, φ représentant la première lettre du mot fonction en grec. Cependant, notre proposition d'enseignement s'insérant dans le polycopié d'un cours déjà construit (Toint 2007), nous en avons repris les notations.

Remarquons que ce qui a été introduit jusqu'à présent n'est qu'une notation, $y_j(v)$, pour indiquer que la $j^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur v dans la base X est *fonction* de v. Cette écriture n'a de sens que si on propose une fonction y_j telle que $\begin{array}{rccc} y_j : & E & \to & K \\ & v & \mapsto & y_j(v) \end{array}$, c'est-à-

[63] Il s'agit ici du cadre des matrices carrées à 2 lignes, 2 colonnes : $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

[64] Un espace vectoriel *E*, de dimension *n*.

dire une fonction définie sur l'espace vectoriel *E* et à valeurs dans le champ des scalaires *K*. Pour que l'effet des fonctions y_j $(j=1,...,\dim E)$ en un vecteur de *E* en donne la *j*ème coordonnée dans la base *X*, nous démontrons qu'il est nécessaire que ces fonctions y_j soient linéaires. Il s'agit donc de formes linéaires. Tout en utilisant la notation des crochets de dualité (que nous avions recommandée, voir § 1.2.b), nous montrons dans un premier temps les conditions que doivent remplir les formes linéaires y_j pour que, appliquées en les vecteurs x_i $(i=1,...,n)$ de la base *X*, elles donnent les coordonnées de ces vecteurs. Les relations de dualité : $\forall i,\ j=1,\ ...,\ n:\ [x_i,\ y_j]=\delta_{ij}$ ne sont donc pas données telles quelles, mais découlent du raisonnement suivi. Nous ne leur donnons cependant pas encore ce nom dans l'enseignement. Nous démontrons ensuite que les formes linéaires y_j $(j=1,...n)$ vérifiant les relations $\forall i,\ j=1,\ ...,\ n:\ [x_i,\ y_j]=\delta_{ij}$ impliquant les vecteurs x_i $(i=1,...,n)$ de la base *X* sont telles que, appliquées en un vecteur *v* quelconque de *E*, elles en fournissent la *j*ème coordonnée, ce qui justifie les termes de *fonctions coordonnées* qu'on leur avait données. Nous démontrons ensuite que de telles formes linéaires y_j $(j=1,...n)$ forment une base du dual de *E*. Il en découle que *E* et son dual *E'* ont même dimension, et que tout espace vectoriel est isomorphe à son dual. On donne enfin à l'ensemble des formes linéaires y_j $(j=1,...n)$, sous forme de définition, le nom de base duale de la base *X*.

Nous énonçons et démontrons ensuite un théorème disant que si un ensemble de *n* vecteurs $\{x_i\}_{i=1}^n$ d'un espace vectoriel *E* d dimension *n* vérifie avec un ensemble de *n* formes linéaires $\{y_j\}_{j=1}^n$ définies sur *E* les relations $[x_i,\ y_j]=\delta_{ij}\quad \forall i,\ j=1,\ ...,\ n$, alors $\{x_i\}_{i=1}^n$ constitue une base de *E* et $\{y_j\}_{j=1}^n$ constitue une base de *E'*.

Nous faisons ensuite remarquer que la donnée d'une base *X* d'un espace vectoriel *E* et de sa base duale *Y* permet d'obtenir l'expression analytique complète d'une forme linéaire quelconque du dual de *E* (propriété souvent utilisée en exercices).

Nous respectons la philosophie du cours en n'explicitant pas une méthode générale permettant de calculer la base duale d'une base d'un espace vectoriel donné ; nous proposons cependant un exercice et sa résolution pour l'illustrer dans le cadre matriciel. Ce cadre a été préféré à un cadre géométrique ou algébrique car la distinction entre les composantes d'un vecteur et ses coordonnées dans une base peut plus facilement être mise en lumière (voir § 1.2.a). Nous poursuivons l'illustration dans le cadre matriciel en utilisant la finalité outil qui a motivé l'introduction des bases duales : nous établissons les coordonnées d'une matrice donnée en lui appliquant les différentes formes linéaires de la base duale calculée.

Pour terminer, nous énonçons et démontrons un théorème montrant l'utilité de la finalité outil proposée en introduction dans le secteur « applications linéaires » pour l'établissement des composantes d'une matrice représentant une application linéaire par rapport à des bases spécifiées.

Ainsi, dans notre proposition d'enseignement, la construction de la base duale d'une base *X* d'un espace vectoriel *E* a été motivée par une finalité outil-résolution de ce thème de la dualité. En agissant de la sorte, nous sommes partis du secteur « espaces vectoriels » en abordant le sujet des coordonnées d'un vecteur ; nous avons transité par le secteur « applications linéaires » lorsque nous avons constaté que les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée étaient *fonction* du vecteur considéré, et que ces fonctions devaient être linéaires ; nous sommes arrivés dans le secteur « dualité » en parlant par exemple de base du dual ou d'isomorphisme entre un primal et son dual. Les passages entre ces différents secteurs de l'algèbre linéaire s'effectuent donc progressivement, en allant du plus ancien au plus nouveau même si, nous en sommes consciente, ce que nous appelons *ancien* ici (les coordonnées d'un vecteur) est encore relativement nouveau pour les étudiants[65].

4. Analyse des données recueillies à propos des dispositifs et de leurs conséquences pour les étudiants

Nous présentons maintenant une analyse des données recueillies à propos des dispositifs et de leurs conséquences auprès des étudiants. Dans un premier temps, nous nous tournons vers les dispositifs qui ont été mis en œuvre dans le cadre de l'opération tremplin ou des travaux de groupe (§ 4.1). Nous nous concentrons ensuite sur le dispositif « Bases duales » (§ 4.2) qui a été mis en œuvre dans le cadre du cours théorique donné en MP1[66].

4.1. Dispositifs mis en œuvre en tremplin et travaux de groupe

Quatre des cinq dispositifs conçus et présentés dans la section précédente ont été mis en œuvre dans le cadre de l'opération tremplin ou des travaux de groupe. Il s'agit des dispositifs que nous avons nommés « Matrices », « Espaces vectoriels », « Applications » et « Formes linéaires et dual ». Les trois premiers que nous venons de citer concernent ce que nous avons appelé des *prérequis* aux notions de dualité (voir § 1.2.a). Nous n'avons donc pas pour but d'analyser pour elles-mêmes les données recueillies lors de la mise en œuvre de ces trois dispositifs, puisque ces données n'impliquent pas directement les notions de dualité auxquelles nous nous intéressons dans notre travail.

De plus, lors de la mise en œuvre des quatre dispositifs présentés dans le cadre de l'opération tremplin ou d'un travail de groupe, nous avons occupé la position d'un enseignant. De cette position découle une difficulté de recueil et d'analyse de données.

Concernant ces quatre dispositifs, nous avons donc préféré, dans un premier temps, livrer des *impressions* recueillies lors de leur mise en œuvre (§ 4.1.a) ; et dans un deuxième temps, faire l'analyse d'un questionnaire proposé à des étudiants inscrits en mathématique à l'université de Namur, *après* la mise en œuvre de ces dispositifs (§ 4.1.b).

a) Impressions générales

Nous présentons ici des impressions recueillies lors de la mise des dispositifs concernés dans la section 4.1. Il s'agit de réflexions émises par les étudiants ou de nos propres réflexions, en tant qu'enseignant. Quand cela s'y prête, nous les analysons en tant que chercheur.

Dispositif « Matrices »

Lors de la mise en œuvre du dispositif « Matrices », les étudiants éprouvaient des difficultés à s'investir dans les tâches proposées. Il s'agit de déterminer si telle ou telle structure peut s'appliquer à un ensemble de matrices, en fonction des lois considérées. Les techniques associées aux types de tâches présents dans le questionnaire distribué ne sont pas à proprement parler calculatoires, et impliquent directement la présence d'éléments théoriques.

[65] Remarquons tout de même que les programmes de l'enseignement secondaire en Belgique contiennent de la géométrie analytique où les coordonnées de vecteurs sont présentées dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

[66] Pour rappel, nous utilisons cette abréviation pour désigner la première année d'étude pour les mathématiques ou la physique à l'université de Namur (Belgique).

Nous constatons auprès de nombreux étudiants une difficulté que nous pouvons attribuer à un premier type de transition selon Winsløw (2008).

De plus, ce dispositif a permis à certains étudiants de s'apercevoir davantage du caractère unificateur des notions d'algèbre linéaire. En effet, quelques étudiants étaient surpris du fait que les lettres désignant les éléments des structures algébriques dans l'énoncé des propriétés de celles-ci puissent désigner « toute une matrice », et pas seulement un n-uplet (élement de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$) ou une composante a_{ij} d'une matrice (élément de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Dispositif « Espaces vectoriels »

Lors des consultations prévues dans le cadre des travaux de groupe (étudiants de mathématiques) qui ont mis en œuvre le dispositif « Espaces vectoriels », nous avons également pu constater la difficulté qu'ont les étudiants à s'investir dans des tâches non calculatoires. Ainsi, les étudiants avaient déjà abordé les questions sur les dépendances ou indépendances linéaires de vecteurs (voir question 2 de l'énoncé du travail de groupe sur les espaces vectoriels, § 3.3), avant même d'avoir correctement défini les lois permettant de définir les différents espaces vectoriels des vecteurs impliqués (question 1). Evidemment, le discours (même écrit !) sur la technique employée pour résoudre les tâches calculatoires qui leur étaient proposées en question 2 n'était pas présent (puisqu'il devait être établi sur base des réponses à la question 1), marquant ainsi la difficulté qu'ont les étudiants à adjoindre un bloc technologico-théorique au bloc practico-technique (premier type de transition selon Winsløw, 2008).

Nous avons également pu constater que les étudiants éprouvaient des difficultés à écrire des relations de dépendance linéaire entre vecteurs lorsque ces derniers n'étaient pas des n-uplets, et plus particulièrement lorsqu'il s'agissait de fonctions. Ainsi, si les étudiants établissent bien que des fonctions f_1, f_2, f_3 données (voir question 2, § 3.3) sont linéairement dépendantes, ils ont parfois besoin d'aide lors des consultations des travaux de groupe pour écrire la relation de dépendance linéaire qui les lient ($3f_1 - 3f_2 - f_3 = 0$ ou $f_3 = 3f_1 - 3f_2$ par exemple). Ceci peut s'expliquer par le fait qu'établir la dépendance ou l'indépendance linéaire de vecteurs $x_i (i = 1,...p)$ (même si ce sont des fonctions), revient à une tâche de type calculatoire, puisqu'il s'agit de résoudre un système homogène d'équations linéaires $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$ dont les inconnues sont des *scalaires* (type de tâches déjà connu des étudiants dans l'institution enseignement secondaire) ; la dépendance ou l'indépendance linéaire des vecteurs considérés dépendra alors du nombre de solutions trouvées (indépendance linéaire s'il y a une seule solution ; dépendance linéaire s'il y a une infinité de solutions). Par contre, pour décrire la relation de dépendance linéaire qui pourrait en découler (exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres par exemple), une interprétation des résultats est nécessaire. Cela implique pour les étudiants de pouvoir se dégager de la technique qui vient d'être mise en œuvre pour venir à bien de la tâche proposée, et de pouvoir y adjoindre un discours (ce que Chevallard appelle la technologie), lui-même justifié par une théorie. Ceci illustre donc encore bien des difficultés relevant du premier type de transition décrit par Winsløw (2008).

Dispositif « Applications »

Rappelons que ce dispositif avait été mis en œuvre dans le cadre de l'opération tremplin pour les physiciens. Les étudiants étaient invités à travailler par groupe de 3 ou 4. Cette méthodologie a permis aux étudiants d'instaurer un débat entre eux, en exprimant leurs conceptions sur les applications. Ces conceptions ont alors pu évoluer. Un étudiant dira par exemple : « Ah, c'est tout ça, f ! » en entourant toute l'expression suivant « f : » dans

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & & (x+y, x-y) \end{array}.$$

Soulignons encore le côté intéressant du travail collectif des étudiants, lors de la mise en commun finale avec l'assistant : lorsque des avis d'étudiants étaient encore divergents, un rapide débat entre pairs s'installait, les étudiants se corrigeant alors entre eux.

Dispositif « Formes linéaires et dual »

Lors de la mise en place du dispositif « Formes linéaires et dual » dans le cadre de l'opération tremplin, un étudiant nous dira s'étonner du fait que ce n'était « que ça » le dual. Il dira aussi que c'était « facile » vu comme ça. Les étudiants ont dit aussi apprécier l'illustration qui a été proposée en tremplin des primal, dual et bidual (voir Annexe 9) : ils ont apprécié la présentation de ces notions dans des cadres variés, différents du cadre générique, avec explicitations des vecteurs des différents espaces considérés (primal, dual, bidual).

b) Questionnaire « post-dispositif »

Après avoir livré quelques impressions sur le déroulement des dispositifs proposés dans le cadre de l'opération tremplin ou des travaux de groupe, nous présentons maintenant, après en avoir décrit la méthodologie, un questionnaire qui a été proposé aux étudiants de première année après la mise en place des dispositifs présentés. Nous en faisons l'analyse a priori avant de présenter l'analyse des résultats qui en découlent. Par la suite, nous faisons référence à ce questionnaire sous les termes questionnaire « post-dispositif ».

Méthodologie

Le questionnaire « post-dispositif » que nous nous proposons de décrire maintenant a été proposé aux étudiants inscrits en première année *mathématique* à l'université de Namur le 24 mars 2009, dans une plage horaire normalement dédiée à des travaux dirigés d'algèbre. **Il ne s'agit donc pas des étudiants ayant répondu au questionnaire « débutants »** présenté au chapitre 4, ce questionnaire ayant été proposé l'année précédente aux étudiants de première année (février 2008).

Vingt étudiants étaient présents pour répondre au questionnaire « post-dispositif » en 2009. Remarquons que pour des contraintes d'horaires, nous n'avons pas eu l'occasion de le proposer aux étudiants inscrits en physique. Les étudiants disposaient d'une heure trente pour y répondre par écrit. Le temps imparti leur a été suffisant pour répondre individuellement aux questions proposées.

Au moment où le questionnaire « post-dispositif » a été proposé aux étudiants de mathématiques, ces derniers ont déjà vu au cours théorique les espaces vectoriels, les applications, transformations et formes linéaires (et la dualité), les déterminants, les valeurs et vecteurs propres, ainsi que les espaces métriques et transformations unitaires (voir Annexe 5). Les travaux dirigés ont quant à eux suivi la même progression, mais n'ont pas encore abordé les espaces métriques et transformations unitaires. Tous les étudiants inscrits en mathématiques ont réalisé le travail de groupe (voir § 3.3), et ont donc expérimenté le dispositif « Espaces vectoriels ». Cependant, étant donné que les dispositifs « Matrices » et « Applications linéaires et dual » ont été proposés dans le cadre de l'opération tremplin, nous ne pouvons pas garantir que tous les étudiants inscrits en mathématique les ont expérimentés, bien qu'une importante majorité d'entre eux ait assisté aux séances tremplin mettant en œuvre ces dispositifs.

Enfin, comme les étudiants concernés ici sont inscrits en mathématique, aucun d'entre eux n'a été confronté au dispositif « Applications », proposés seulement aux étudiants inscrits en physique (voir § 3.4).

Présentation du questionnaire « post-dispositif »

Voici le questionnaire qui a été proposé aux étudiants de mathématique le 24 mars 2009.

<u>Questionnaire en vue d'un travail de recherche</u>

Pour répondre aux questions ci-dessous, vous pouvez utiliser, à votre meilleure convenance, le langage mathématique formel, la langue française, des graphiques ou dessins, etc.

<u>Question 1.</u> Considérons $\mathcal{P}^3$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, construit sur le champ des réels.

1. Donner un exemple de forme linéaire définie sur $\mathcal{P}^3$.
2. Donner l'expression générale d'une forme linéaire définie sur $\mathcal{P}^3$.
3. Soient, pour $i = 1, ..., 4$, $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$: $p_1(x) = x^3 + 2x^2 + 4$, $p_2(x) = 2x^3 - x + 2$, $p_3(x) = x^3 - 1$, $p_4(x) = 2x^3 + 3$.

   Soit $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Montrez que l'ensemble A constitue une base de $\mathcal{P}^3$, et déterminez-en la base duale.
4. Si l'ensemble $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ défini ci-dessus est une base et que vous avez pu en calculer la base duale, quelles seraient les coordonnées, dans la base A, du polynôme p défini par $p(x) = 15x^3 + 8x^2 + 10x + 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$? Explicitez votre démarche.
5. Soit la transformation linéaire $f : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^3$ telle que $f(p) = p_5$, où pour n'importe quel p tel que $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, on a $p_5(x) = (2a_3 - a_0)x^3 + (2a_2 - a_1)x^2 + (a_3 - a_2 - a_0)x - 3a_1$ ($a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$).

   Comment en définiriez-vous la transformation transposée ?

<u>Question 2.</u> Soient f_1, f_2, f_3 telles que :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \to & \mathbb{R} \\ v = (a, b, c, d, e) & & f_1(v) = 3a - 2e \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \to & \mathbb{R} \\ v = (a, b, c, d, e) & & f_2(v) = a - b + 2c \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \to & \mathbb{R} \\ v = (a, b, c, d, e) & & f_3(v) = 3b + 6c - 2e \end{array}$$

1. Donner un exemple d'espace vectoriel auquel appartiennent f_1, f_2, f_3.
2. f_1, f_2, f_3 sont-elles linéairement indépendantes ou dépendantes ?
3. Donnez un exemple de forme linéaire qui n'appartient pas au Span{ f_1, f_2, f_3 }.

4. Soit $\{ g_1, g_2, g_3, g_4 \}$ une famille libre de formes linéaires[67] définies sur $\mathbb{R}^5$. Est-il possible de trouver des formes linéaires h_1 et h_2 telles que :

  - $\{ g_1, g_2, g_3, g_4, h_1, h_2 \}$ forme une famille libre de formes linéaires ?
  - $\text{Span}\{ g_1, g_2, g_3, g_4 \} \cap \text{Span}\{ h_1, h_2 \} = \{0\}$?

Question 3. Choisissez un espace vectoriel autre que celui des polynômes, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), et donnez :

1. un exemple de forme linéaire défini sur l'espace vectoriel choisi,
2. un exemple d'application (sur l'espace vectoriel choisi) qui ne soit pas une forme linéaire, en justifiant vos deux exemples.

Analyse a priori du questionnaire « post-dispositif »

Le questionnaire « post-dispositif » est composé de trois parties (questions 1, 2 et 3).

La première partie (question 1) est composée de cinq sous-questions présentant exactement le même canevas que celui que nous avions utilisé pour le questionnaire « débutants » et le premier travail de groupe (voir l'enquête proposée afin de détecter les difficultés des étudiants en matière de dualité décrite au chapitre 4)[68]. Dans le questionnaire « débutants », nous avions contextualisé les types de tâches proposés dans le cadre algébrique particularisé à $\mathbb{R}^4$, ainsi que dans le cadre matriciel (matrices carrées à deux lignes et deux colonnes). Dans le questionnaire « post-dispositif » que nous présentons ici, nous avons contextualisé les types de tâches dans le cadre polynomial (fonctions réelles polynomiales de degré inférieur ou égal à trois). Nous renvoyons le lecteur au chapitre 4, § 2.1 pour l'analyse a priori de cette première partie du questionnaire « post-dispositif ». Rappelons que les thèmes de la dualité concernés dans cette première partie du questionnaire sont « les formes linéaires », « les bases duales » et « l'application transposée ». Les types de tâches dont relèvent les cinq sous-questions reprises de la première partie du questionnaire « post-dispositif » sont explicités dans le tableau suivant :

Intitulé et notation abrégée du Type de tâches	**Description du Type de tâches**	**Thème du dual concerné**
« Exemple de forme linéaire » Exemp_FL	Etant donné un (sous-)espace vectoriel, donner un exemple de forme linéaire définie sur cet espace.	Les formes linéaires
« Expression générale d'une forme linéaire » ExpGen_FL	Etant donné un (sous-)espace vectoriel, définir l'expression générale d'une forme linéaire définie sur cet espace.	Les formes linéaires

[67] Famille libre de formes linéaires = ensemble de formes linéaires linéairement indépendantes.
[68] Rappelons que les étudiants ayant répondu au questionnaire « post-dispositif » ne sont pas les mêmes que les étudiants ayant répondu au questionnaire « débutants », puisque ces deux questionnaires ont été proposés à un an d'intervalle chaque fois à des étudiants de première année.

Intitulé et notation abrégée du Type de tâches	**Description du Type de tâches**	**Thème du dual concerné**
« Bases primale et duale » Base_P_D	Etant donnés un (sous-)espace vectoriel de dimension *n* et un ensemble de *n* vecteurs de celui-ci, déterminer s'il s'agit d'une base de celui-ci, et dans l'affirmative, en déterminer la base duale.	Les bases duales
« Fonctions coordonnées » FctCoor	Etant données une base et sa base duale, déterminer les coordonnées d'un vecteur du primal.	Les bases duales
« Transformation transposée » Def_TTransp	Etant donnée une transformation définie sur un (sous)espace vectoriel, en définir la transformation transposée.	La transposée

Tableau 5-3 : Types de tâches présents dans la première partie du questionnaire « post-dispositif »

Tout comme nous l'avions fait au chapitre 4, nous séparons le type de tâches « Base primale et duale » en deux sous-types de tâches : « base primale » et « base duale », décrites dans le tableau suivant :

Intitulé et notation abrégée du Sous-type de tâches	**Description du sous-type de tâches**	**Thème du dual concerné**
« Base primale» Base_P	Etant donnés un (sous-)espace vectoriel de dimension *n* et un ensemble de *n* vecteurs de celui-ci, déterminer s'il s'agit d'une base de celui-ci.	
« Base duale » Base_D	Etant donnés un (sous-)espace vectoriel de dimension *n* et une base de celui-ci, en déterminer la base duale.	Les bases duales

Tableau 5-4 : Codification de sous-types de tâches (1ère partie du questionnaire « post-dispositif »)

La deuxième partie du questionnaire « post-dispositif » concerne les thèmes « le dual » et « les formes linéaires ». Elle est constituée de quatre sous-questions. Après avoir défini trois applications (formes linéaires) f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}^5$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, en en donnant l'expression analytique complète, nous demandons tout d'abord un exemple d'espace vectoriel auquel appartiennent f_1, f_2, f_3. Volontairement, cette première sous-question ne contient pas les termes « formes linéaires », pour ne pas induire automatiquement la présence du terme « dual » dans la réponse des étudiants.

La deuxième sous-question de cette partie du questionnaire « post-dispositif » demande si f_1, f_2, f_3 sont linéairement dépendantes ou indépendantes. Pour pouvoir répondre à cette question, les étudiants doivent pouvoir considérer des fonctions comme des vecteurs, c'est-à-dire des éléments d'un espace vectoriel.

On demande ensuite (troisième sous-question) aux étudiants de donner un exemple de forme linéaire qui n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par f_1, f_2, f_3 (noté Span{ f_1, f_2, f_3 }). Cet énoncé relève d'un type de tâches plus complexe que celui dont relève la deuxième sous-question en ce sens qu'il est ici demandé aux étudiants de fournir un exemple, et non d'appliquer une technique (résolution d'un système d'équations linéaires en l'occurrence). De plus, ce type de tâches fait intervenir la notion de sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs (des formes linéaires dans le cas présent), qui a été présenté aux étudiants dans la partie du cours consacrée aux sous-espaces vectoriels (secteur « espaces vectoriels »), avant que ne soient introduites les notions de dualité. Les formes linéaires ont été présentées au cours théorique, dans un premier temps, aux étudiants comme un cas particulier des applications linéaires (secteur « applications linéaires »). Nous connaissons les difficultés qu'ont les étudiants à établir des liens entre les différentes parties (différents secteurs) du cours d'algèbre linéaire. Le type de tâches dont relève la question posée ici mélange volontairement des notions introduites dans différents secteurs d'algèbre linéaire. Précisons aussi que le type de tâches dont relève cette troisième sous-question n'a été répertorié dans aucun manuel analysé (voir chapitre 3). Il ne s'agit donc pas d'un type de tâches familier pour les étudiants.

La quatrième sous-question de la deuxième partie du questionnaire « post-dispositif » a pour point de départ un ensemble de quatre formes linéaires définies sur $\mathbb{R}^5$: g_1, g_2, g_3, g_4, dont l'expression analytique n'est pas explicitée. On demande alors tout d'abord aux étudiants s'il est possible de trouver deux formes linéaires h_1, h_2 telles que :

- $\{g_1, g_2, g_3, g_4, h_1, h_2\}$ forme une famille libre de formes linéaires.
- $\mathrm{Span}\{g_1, g_2, g_3, g_4\} \cap \mathrm{Span}\{h_1, h_2\} = \{0\}$.

Les expressions analytiques des formes linéaires $g_i (i = 1,...,4)$ n'étant pas données, nous pouvons supposer que les étudiants adopteront, pour répondre à ces questions, une technique non calculatoire, basée sur un discours théorique. Les étudiants ne se trouveront donc pas confrontés à un phénomène de transition de premier type, étant donné que la théorie fait partie intégrante de la technique à appliquer pour résoudre la tâche concernée. Notons cependant que la question posée requiert de l'initiative de la part des étudiants, ce qui est typique des tâches proposées dans l'institution université.

Le tableau qui suit reprend les types de tâches répertoriés dans la deuxième partie du questionnaire « post-dispositif ».

Intitulé et notation abrégée du Type de tâches	**Description du Type de tâches**	**Thème du dual concerné**
« Exemple d'espace vectoriel de fonctions » EspVec_Fonct	Etant données des applications, déterminer un (sous) espace vectoriel auxquelles elles appartiennent.	Les formes linéaires
« Formes linéairement indépendantes » Formes_LI	Montrer le caractère libre (ou lié) d'un ensemble de formes linéaires données.	Les formes linéaires

Intitulé et notation abrégée du Type de tâches	**Description du Type de tâches**	**Thème du dual concerné**
« Exemple de forme linéaire appartenant à un sous-espace du dual » Ex_Forme_Span	Donner un exemple de forme linéaire appartenant à un sous-espace engendré par d'autres formes linéaires.	Les formes linéaires
« Recherche de formes linéairement indépendantes » Rech_Formes_LI	Déterminer s'il est possible de trouver des formes linéaires telles qu'ajoutées à un ensemble de formes linéaires linéairement indépendantes déjà donné, le tout constitue toujours un ensemble de formes linéaires linéairement indépendant.	Les formes linéaires
« Recherche de formes caractéristiques Span » Rech_Formes_Span	Déterminer s'il est possible de trouver des formes linéaires telles que le sous-espace qu'elles engendrent vérifie telle ou telle propriété.	Les formes linéaires

Tableau 5-5 : Types de tâches présents dans la deuxième partie du questionnaire « post-dispositif »

Enfin, la troisième partie du questionnaire « post-dispositif » demande aux étudiants de choisir un espace vectoriel autre que celui des polynômes, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ et de présenter une forme linéaire définie sur cet espace, ainsi qu'une application qui ne soit pas une forme linéaire. Cette question nous permettra de nous rendre compte si les étudiants disposent d'un répertoire minimum d'exemples d'espaces vectoriels, et si celui-ci est *mobilisable* (Robert 1998). Les types de tâches impliqués dans la troisième partie du questionnaire sont repris dans le tableau suivant :

Intitulé et notation abrégée du Type de tâches	**Description du Type de tâches**	**Thème du dual concerné**
« Exemple d'espace vectoriel » Ex_EspVec	Donner un exemple d'espace vectoriel.	
« Exemple de forme linéaire » Ex_FL	Etant donné un (sous-)espace vectoriel, donner un exemple de forme linéaire définie sur cet espace.	Les formes linéaires
« Exemple d'application » Ex_Appl	Etant donné un (sous-)espace vectoriel, donner un exemple d'application définie sur cet espace, qui ne soit pas une forme linéaire.	Les formes linéaires

Tableau 5-6 : Types de tâches présents dans la troisième partie du questionnaire « post-dispositif »

Analyse des réponses au questionnaire « post-dispositif »

Nous présentons maintenant brièvement les résultats des étudiants mathématiciens ayant répondu au questionnaire « post-dispositif », après qu'aient été mis en place les dispositifs « Matrices », « Espaces vectoriels » et « Formes linéaires et dual ». Nous nous gardons de tirer des conclusions trop générales, étant donnée la difficulté d'analyser l'impact des dispositifs mis en œuvre.

Examinons tout d'abord les résultats obtenus à la première partie du questionnaire « post-dispositif ». Etant donnée la similitude des types de tâches dont relèvent les questions proposées dans cette première partie avec les types de tâches du questionnaire « débutants » (voir chapitre 4), nous pouvons mettre en relation avec les résultats obtenus dans les réponses aux deux questionnaires. Comme nous avons considéré, dans le questionnaire « post-dispositif », un cadre contextualisé non algébrique (polynomial), nous mettrons les résultats obtenus en relation avec ceux obtenus dans le cadre contextualisé non algébrique (matriciel) du questionnaire « débutants ». Bien entendu, la comparaison reste relative, étant donné qu'il ne s'agit pas des mêmes groupes d'étudiants, et que la taille des échantillons reste petite (37 étudiants ont répondu au questionnaire « débutants » en février 2008, 20 étudiants pour le questionnaire « post-dispositif » en mars 2009).

Le tableau ci-dessous nous présente, pour les différents types de tâches présents dans la première partie du questionnaire « post-dispositif », le nombre d'étudiants (sur un total de 20) et le pourcentage d'étudiants ayant <u>*essayé*</u> ou <u>*réussi*</u> (selon les lignes considérées) à résoudre les problèmes correspondants.

	Types de tâches :					
	Exemp_FL	ExpGen_FL	Base_P	Base_D	FctCoor	Def_TTransp
Essai	20	20	20	17	19	14
	100%	**100%**	**100%**	**85%**	**95%**	**70%**
Réussite	12	10	20	8	15	4
	60%	**50%**	**100%**	**40%**	**75%**	**20%**

Tableau 5-7 : Nombre et pourcentage d'étudiants *essayant de résoudre* et *ayant réussi à résoudre* les exercices correspondants aux différents types de tâches proposés dans la 1ère partie du questionnaire « post-dispositif »

On peut ainsi constater que les étudiants n'hésitent pas, en grande majorité, à *essayer* de résoudre les problèmes qui leur sont soumis. De plus, les *taux de réussite* sont significativement plus importants que ceux obtenus dans le questionnaire « débutants » pour le cadre matriciel.

Il faut de plus relativiser les résultats qui n'atteignent pas 50% :

- Dans le cas du type de tâches concernant les bases duales (Base_D) par exemple, le tableau indique que 40% des étudiants ayant répondu au questionnaire « post-dispositif » ont réussi à établir entièrement et parfaitement la base duale de la base proposée dans l'énoncé. A ceux-là, nous pouvons encore ajouter 30% d'étudiants supplémentaires qui ont réussi partiellement (c'est-à-dire avec au moins une erreur de calcul) cet exercice. Précisons aussi que les étudiants expriment les formes linéaires de la base duale, dans la majorité des cas, sous leur expression analytique complète (espace de départ, d'arrivée et image de n'importe quel vecteur de l'espace de départ).

- Dans le cas du type de tâches concernant la transformation transposée, quatre étudiants (20%) établissent l'expression de l'application transposée de l'application linéaire donnée dans l'énoncé. Ces chiffres peuvent paraître faibles, mais si nous nous souvenons que, dans le questionnaire « débutants », seul un étudiant (2,7%) avait réussi à le faire dans le cadre algébrique ($\mathbb{R}^4$), et qu'aucun étudiant n'y était parvenu dans le cadre matriciel, nous pouvons estimer que ce résultat n'est pas insignifiant. Précisons qu'aucun dispositif n'a été mis en place concernant l'application transposée.

Présentons maintenant quelques résultats concernant la deuxième partie du questionnaire « post-dispositif », consacrée principalement au thème des formes linéaires.

	Types de tâches :				
	EspVec_Fonct	Formes_LI	Ex_Forme_Span	Rech_Formes_LI	Rech_Formes_Span
Essai	19	20	18	19	15
	95%	**100%**	**90%**	**95%**	**75%**
Réussite	15	17	15	13	4
	75%	**85%**	**75%**	**65%**	**20%**

Tableau 5-8 : Nombre et pourcentage d'étudiants *essayant de résoudre* et *ayant réussi à résoudre* les exercices correspondants aux différents types de tâches proposés dans la 2ème partie du questionnaire « post-dispositif »

Nous pouvons à nouveau constater que les étudiants ne sont pas effrayés de travailler avec des applications considérées comme des vecteurs : chaque tâche proposée est travaillée par 75% des étudiants au minimum.

Dans la réponse fournie à la question relevant du type de tâches EspVec_Fonct, remarquons que, s'il y a 75% d'étudiants qui citent des espaces fonctionnels, « seuls » 45% d'étudiants parlent du dual.

Alors que le type de tâches Formes_LI avait été travaillé dans le travail de groupe (ce qui pourrait influencer en partie le taux de réussite de 85%), il n'en a pas été de même pour les types de tâches Ex_Forme_Span, Rech_Formes_LI et Rech_Formes_Span, que les étudiants rencontraient pour la première fois, tout au moins dans un cadre fonctionnel pour certains. Nous avons également mentionné lors de l'analyse a priori que les trois types de tâches proposés à la fin de cette deuxième partie du questionnaire ne sont pas familiers pour les étudiants, et sont plus complexes que le type de tâches Formes_LI par exemple, étant donné qu'il ne s'agit pas de vérifier un résultat, mais de le *formuler* après analyse des composantes de l'énoncé.

Détaillons un peu plus les résultats associés au dernier type de tâches (Rech_Formes_Span) considéré dans cette deuxième partie du questionnaire « post-dispositif ». Nous annonçons un taux de réussite de 20% (4 étudiants). Mais il faut préciser que, parmi les seize autres étudiants, deux d'entre eux, soit 10% de l'ensemble des étudiants ayant répondu au questionnaire, ont interprété le quantificateur existentiel sous entendu par la question (« Est-il possible de trouver des formes… ») avec un quantificateur universel. Ainsi, ces étudiants développent des arguments corrects dans leur réponse, mais sur une mauvaise lecture de l'énoncé. De plus, cinq étudiants, soit 25%, établissent leur raisonnement sur le fait que la dimension de $\mathrm{Span}\{h_1, h_2\}$ vaut deux, alors que ce n'est pas le cas si h_1 et h_2 sont des formes *linéairement dépendantes*.

Le tableau suivant présente les résultats concernant la troisième partie du questionnaire « post-dispositif » :

	Types de tâches :		
	Ex_EspVec	Ex_FL	Ex_Appl
Essai	20	17	16
	100%	**85%**	**80%**
Réussite	17	11	13
	85%	**55%**	**65%**

Tableau 5-9 : Nombre et pourcentage d'étudiants *essayant de résoudre* et *ayant réussi à résoudre* les exercices correspondants aux différents types de tâches proposés dans la 3ème partie du questionnaire « post-dispositif »

Au vu de ces résultats, nous pouvons affirmer que les étudiants disposent d'un répertoire minimum d'espaces vectoriels. Parmi les espaces vectoriels cités par les étudiants, onze sont matriciels (matrices carrées d'ordre 2 ou d'ordre 3), deux sont fonctionnels (transformations de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$), quatre peuvent être qualifiés d'algébriques ($\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{Z}^3$ construit sur $\mathbb{Z}$ [69] ; ou $\mathbb{Q}^3$ construit sur $\mathbb{Q}$). Les essais infructueux concernent l'ensemble $\mathbb{N}$ (cité par deux étudiants) ou sont farfelus (un cas).

On constate que le taux de réussite associé au type de tâches Ex_FL est moins élevé que celui associé au type de tâches Ex_Appl. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'énoncé relevant du type de tâches Ex_Appl n'imposait pas que l'application attendue soit linéaire. Quatre étudiants proposent d'ailleurs une application non linéaire en réponse à la tâche demandée. Dix étudiants sur les treize ayant donné un exemple correct d'application qui n'était pas une forme proposent des applications qui ne sont ni des transformations (même espace de départ que d'arrivée), ni des formes. On peut interpréter cette constatation comme une preuve de la diversité des espaces vectoriels à la disposition des étudiants, étant donné que ces derniers proposent alors, comme espace vectoriel d'arrivée pour l'exemple d'application linéaire donné, d'*autre*s espaces vectoriels que l'espace vectoriel de départ.

Rappelons que le questionnaire « post-dispositif », a été proposé aux étudiants après qu'aient été mis en œuvre, dans le cadre de *l'opération tremplin* ou des *travaux de groupe*, les dispositifs « Matrices », « Espaces vectoriels » et « Formes linéaires et dual ». L'analyse des données recueillies suite à ce questionnaire présente des résultats encourageants. Nous tournons maintenant notre attention vers le dispositif à destination du *cours théorique*, et les données recueillies à son sujet.

[69] Le concept de module, qui est une généralisation du concept d'espace vectoriel, n'a pas été présenté aux étudiants. Nous nous sommes permis d'asscocier ces exemples aux espaces vectoriels.

4.2. Dispositif « Bases duales » mis en œuvre au cours théorique

Nous considérons ici les données recueillies à propos du dispositif « Bases duales » (§ 3.6), qui est un dispositif dont la mise en œuvre est prévue en cours théorique. Ce dispositif a été proposé au professeur donnant le cours d'algèbre linéaire en MP1 au premier quadrimestre de l'année scolaire 2009-2010. Lors de la récolte de données concernant ce dispositif (voir § 3.6, méthodologie), nous occupions donc uniquement la position de chercheur, alors que nous étions également enseignante lors de la mise en œuvre des autres dispositifs proposés.

Nous présentons tout d'abord des données issues de l'interview réalisée auprès du professeur à qui nous avons proposé de mettre en œuvre le dispositif « Bases duales » (§ a). Ensuite, nous présentons les choix qu'il a portés par rapport à ce qui était proposé dans le dispositif (§ b). Enfin, nous proposons une analyse des données récoltées pendant et après les cours théoriques qui ont porté sur les bases duales en MP1 en 2009-2010 (§ c).

a) Interview du professeur enseignant la dualité en 2009-2010

Précisons d'emblée que le professeur en charge du cours d'algèbre linéaire au premier quadrimestre de l'année scolaire 2009-2010 (partie de l'année où la dualité est enseignée en MP1) n'est pas le professeur titulaire du cours d'algèbre linéaire, ce dernier étant absent pendant le premier quadrimestre de l'année académique en question. Le professeur suppléant, que nous nommons Prof.S., est un professeur chevronné, soucieux d'adapter au mieux son enseignement afin de minimiser les difficultés des étudiants lors de leur apprentissage. Il a tout d'abord donné, lorsqu'il était assistant, les travaux dirigés associés au cours d'algèbre linéaire en MP1 pendant plusieurs années. Devenu professeur, l'occasion lui a été donnée de suppléer pendant six années d'affilée des parties du cours d'algèbre (dont quatre années de cours complet). C'est donc naturellement Prof.S. qui supplée le professeur titulaire lors de ses absences (missions à l'étranger ou autres), comme c'était le cas au premier quadrimestre de l'année scolaire 2009-2010.

Nous avons interviewé Prof.S. en mars 2010, lors d'un entretien qui a duré environ trente-cinq minutes. Le guide d'entretien que nous avons suivi est placé en Annexe 11. En nous appuyant sur les réponses du Prof.S., nous retournons les éléments ci-dessous.

Point de vue sur l'enseignement des mathématiques

Le point de vue de Prof.S. sur l'enseignement des mathématiques (en général) qu'il faut apporter aux mathématiciens et physiciens est moins focalisé sur la matière (le contenu) à présenter que sur la réflexion, la rigueur, la méthodologie qui y sont associées. Dans cette optique, le cours d'algèbre linéaire représente l'endroit où il est aisé « de faire de la rigueur pour la rigueur », il représente le cours « le plus abstrait » en MP1. Les démonstrations faisant partie intégrante de la méthodologie liée aux mathématiques, ce professeur y accorde donc une grande importance. L'exercice idéal consiste pour lui non pas en « un exercice chiffré », mais en un « concept générique » que les étudiants devraient pouvoir manipuler, telle une nouvelle démonstration que les étudiants devraient être capable de réaliser en ayant vu les démonstrations présentées au cours. Prof.S. insiste sur l'utilisation d'un formalisme clair (présence de quantificateurs, etc.), mais il n'est pas accroché à un « certain type » de formalisme : peu importe qu'une forme linéaire soit notée y ou f. Il préfère d'ailleurs que les étudiants adoptent leur « propre formalisme » qui pourrait les aider à mieux comprendre les concepts manipulés. Par exemple, pour lui, les étudiants devraient choisir le fait d'utiliser, ou pas, une même lettre pour désigner une application linéaire et la matrice qui lui est associée (par rapport à des bases fixées), en fonction de ce qui les aide le mieux à comprendre les objets représentés par ces lettres.

Si Prof.S. était titulaire du cours d'algèbre, il ne le présenterait pas de la même manière qu'actuellement (voir Annexe 5 pour un plan du cours actuel), ni n'accorderait la même importance aux différents chapitres présents. Il considère que le cours d'algèbre, dans son état actuel, regroupe deux parties relativement différentes : un cours « très théorique » limité à la dimension finie, et un cours de théorie des matrices (le titulaire du cours étant spécialisé dans les méthodes numériques). A condition que cette deuxième partie soit prise en charge par un autre cours du cursus, Prof.S. proposerait de ne conserver dans le cours d'algèbre linéaire de MP1 que la partie du cours plus théorique, qui pourrait alors être approfondie.

Point de vue sur l'enseignement de la dualité

Prof.S. considère plusieurs objectifs à l'enseignement de la dualité en algèbre linéaire. C'est tout d'abord une matière qui « se prête très bien à la rigueur » : c'est un très bel exemple pour inciter les étudiants à parler d'objets qu'ils « ne se représentent pas » facilement. Il y a aussi, derrière la dualité en algèbre linéaire, une préparation à des théories plus « sophistiquées », en optimisation par exemple ; mais cela ne transparait pas dans le cours donné en MP1, car les applications où pourrait intervenir la dualité ne sont présentées que dans les années ultérieures du cursus. Enfin, un autre objectif que Prof.S. perçoit à l'enseignement de la dualité est une « simplification d'écriture », comme par exemple le fait que $y_p(v)$ désigne la $p^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur v dans la base X, si on considère que y_p est le $p^{\text{ème}}$ vecteur de la base duale de X. Sans l'introduction de la base duale de X, le mathématicien n'a pas de notation mathématique appropriée pour désigner la $p^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur v dans la base X. Prof.S. est cependant conscient que les étudiants de première année ne peuvent percevoir aisément ces deux derniers objectifs.

Si Prof.S. était titulaire du cours d'algèbre, il y conserverait l'enseignement de la dualité, pour autant qu'un des objectifs du cours d'algèbre soit encore le travail de la rigueur. Il déplacerait éventuellement la dualité plus loin dans le cours, lorsque les étudiants auraient acquis davantage de maturité dans leur raisonnement mathématique, car, d'après lui, la dualité est une des parties les plus difficiles du cours d'algèbre linéaire de MP1.

En ce qui concerne la partie du cours concernant la dualité actuellement présente dans le polycopié (Toint 2007), Prof.S. la présente aux étudiants avec plus d'explications que ce qui n'est présenté dans le polycopié. De plus, il insiste davantage sur le théorème de réflexivité présentant l'isomorphisme *naturel* entre un espace vectoriel et son bidual, car selon lui c'est une partie difficile pour les étudiants.

Lorsqu'il a pris connaissance du dispositif « Bases duales » que nous avons conçu (voir Annexe 10), Prof.S. estimait que la présentation de la finalité outil des bases duales (formes coordonnées) était intéressante, mais il craignait qu'en la présentant d'emblée (c'est-à-dire avant d'avoir établi une base du dual, duale d'une base du primal, précisant ainsi la dimension de l'espace dual), les étudiants ne confondent l'ensemble des formes linéaires avec celles de la base duale uniquement, et qu'ils ne réduisent tous les éléments du dual à des formes coordonnées, en passant « à côté d'une certaine généralité ». Prof.S. trouve pourtant la formulation de la proposition « très didactique » car, d'après lui, les étudiants ont besoin de se raccrocher à des éléments auxquels on peut associer une représentation, mais il avait peur que « la représentation ne remplace l'objet », et préférait donc une présentation plus formelle comme celle proposée dans le polycopié associé au cours, *avant* la présentation de l'utilité de la base duale. Rappelons que les termes « formes coordonnées » font référence à la finalité outil-résolution que la proposition d'enseignement se propose de mettre en œuvre.

A posteriori, Prof.S. trouve que le fait d'introduire les formes coordonnées (en leur donnant un nom et en en précisant l'utilité) est une « idée géniale », et il a l'impression que cela a aidé certains étudiants. Cette introduction l'a également aidé lors de la présentation d'un élément particulier (a_{ij}) d'une matrice associée à une application linéaire. Si l'an prochain Prof.S. est toujours suppléant pour cette partie du cours d'algèbre linéaire, il est demandeur d'aller plus loin dans l'utilisation des formes coordonnées, pour l'illustration du théorème de réflexivité par exemple (à la base duale de la base duale d'une base *X* du primal correspond cette base *X* du primal).

b) Les choix du professeur par rapport à ce qui était proposé

Prof.S. n'a pas repris telle quelle la proposition d'enseignement sur les bases duales que nous lui avions soumise (voir Annexe 10). Il a cependant utilisé des éléments de notre proposition dans le cours qu'il a donné aux étudiants.

Si nous situons le début du cours sur la dualité à l'introduction des formes linéaires, on peut dire que l'ensemble du cours théorique sur la dualité (en tant qu'objet) a duré quatre heures, étalé sur quatre semaines (du 10 novembre au 1er décembre 2009). Le cours théorique se déroule dans un amphithéâtre, et s'adresse à une soixantaine d'étudiants. La partie du cours concernant les bases duales a débuté une heure après l'introduction des premières notions de dualité (formes linéaires), et a duré cinquante minutes. Nous présentons en Annexe 12 le détail du déroulement des cours où ont été enseignées les notions de dualité. Nous nous concentrons ici sur les notions impliquées dans notre dispositif.

Rappelons que la proposition d'enseignement que nous avons élaborée concernant les bases duales se situe dans le contexte du cours théorique d'algèbre donné à l'université de Namur aux étudiants de première année en mathématique et en physique. Au moment de la possible mise en œuvre du dispositif, le cours théorique a déjà abordé les espaces vectoriels (structures algébriques, dépendance linéaire et dimension, sous-espaces vectoriels), ainsi que les applications et transformations linéaires (noyau, image, matrice par rapport à des bases spécifiées). Les formes linéaires sont introduites comme étant un cas particulier des applications linéaires. Le cours théorique a également déjà établi les lois d'addition et de multiplication par un scalaire permettant d'adjoindre la structure d'espace vectoriel à l'ensemble des applications linéaires. Il en a été de même pour l'ensemble des transformations linéaires, ainsi que pour l'ensemble des formes linéaires. On nomme « dual de *E* » l'espace vectoriel dont les éléments sont les formes linéaires définies sur l'espace vectoriel *E*. La notation des crochets de dualité a été introduite. Cependant, aucun travail dirigé n'a encore été donné sur la dualité, mais des travaux dirigés ont été réalisés sur les applications et transformations *linéaires*.

Comme annoncé lors de son interview, Prof.S. a tout d'abord introduit les bases duales sans faire référence à la finalité outil associée, comme proposé dans notre formulation. Il énonce et démontre un théorème disant que si $\{x_i\}_{i=1}^n$ est une base d'un espace vectoriel *E*, les *n* formes linéaires y_j vérifiant les relations de dualité $y_j(x_i) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, ...n)$ forment alors une base du dual de *E*. La définition de base duale de $\{x_i\}_{i=1}^n$ est ensuite donnée.

Après la présentation des bases duales, les termes « formes coordonnées » sont utilisés, en rapport avec notre proposition d'enseignement (finalité outil de la base duale), pour expliquer le *rôle* du lien entre une base et sa base duale. Deux contextes différents sont alors présentés : un exercice et un théorème.

Présentons l'exercice énoncé et résolu par Prof.S., dans le cadre de $\mathbb{R}^2$. Après avoir donné la base $X=\{(1,1),(1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, le professeur en calcule la base duale, qu'il note $\{y_1,y_2\}$. Il calcule ensuite les coordonnées dans la base X du vecteur $(3,5)$ de $\mathbb{R}^2$ en résolvant un système de deux équations à deux inconnues : $\left[(3,5)\right]^X=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$. Il précise ensuite que l'on peut retrouver ces coordonnées en appliquant les formes linéaires de la base duale au vecteur $(3,5)$: $y_1(3,5)=\frac{1}{2}3+\frac{1}{2}5=4$

$$y_2(3,5)=\frac{1}{2}3-\frac{1}{2}5=-1\ .$$

Prof.S. présente ensuite un deuxième contexte où interviennent les « formes coordonnées » : la recherche des composantes d'une matrice associée à une application linéaire (par rapport à des bases données). Il précise que cela permet d'obtenir directement un élément de la matrice, sans devoir en établir toute une colonne au préalable. Il relie ses propos à un théorème présent dans le polycopié :

> **Théorème 2.28.** Soit $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ une base quelconque de l'espace vectoriel *E* de dimension *n*. Soit $X'=\{y_1,\ldots,y_n\}$ la base duale dans *E'* (définie par la proposition (2.13)).
>
> Soit, de plus, (a_{ij}) la matrice d'une transformation linéaire *f* sur *E*.
>
> Alors, $a_{ij}=[f(x_j),y_i]$

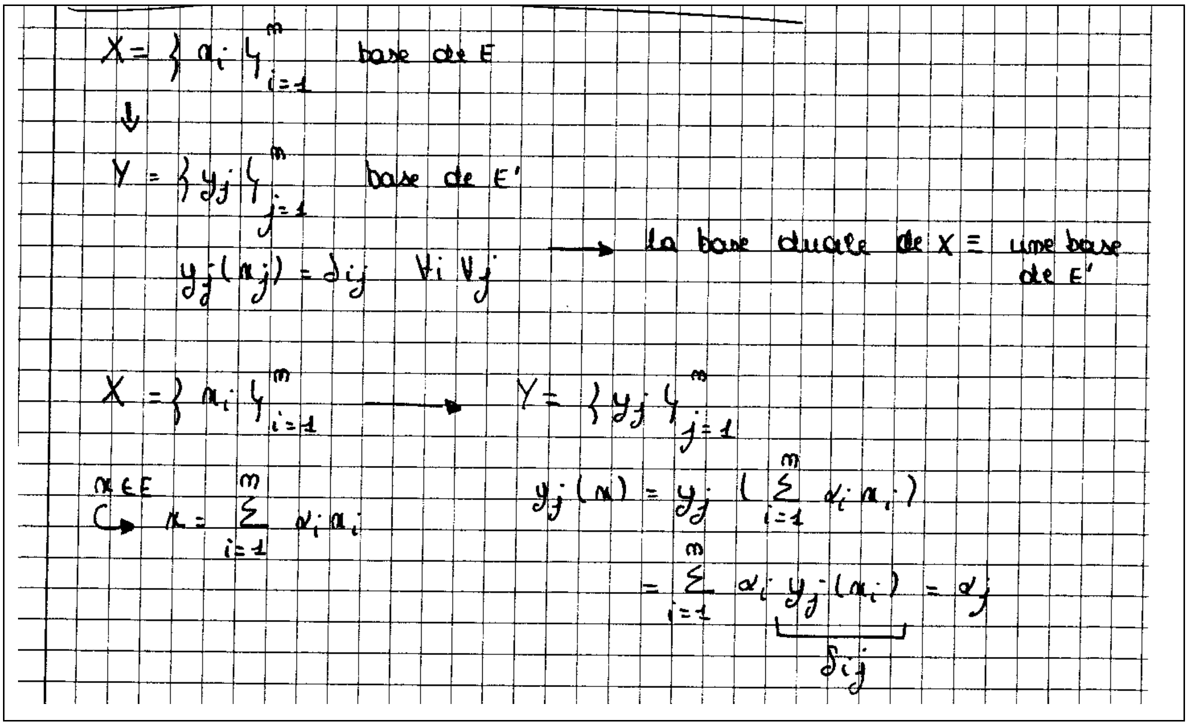
Après avoir présenté ici les choix de Prof.S. par rapport à ce que nous avions proposé dans le dispositif « bases duales », nous présentons maintenant une analyse a posteriori de l'enseignement donné sur les bases duales.

c) Analyse a posteriori

Nous avons déjà présenté l'avis a posteriori du Prof.S. qui a présenté les bases duales (voir § 4.2.a). Nous avons de plus analysé les notes de cours de deux étudiants, relatives au cours théorique donné sur les bases duales et formes coordonnées, que nous présentons Annexe 13. Les deux étudiants dont nous avons relevé les notes de cours n'ont pas échangé ou complété leurs notes ensemble.

Nous présentons tout d'abord un extrait des notes de l'étudiant 1 qui a pris note au cours sur des feuilles séparées du polycopié.

Introduisons tout d'abord les notations utilisées :



$X = \{x_i\}_{i=1}^{m}$ base de E

$\downarrow$

$Y = \{y_j\}_{j=1}^{m}$ base de E'

$y_j(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i \; \forall j$ $\longrightarrow$ la base duale de X = une base de E'

$X = \{x_i\}_{i=1}^{m} \longrightarrow Y = \{y_j\}_{j=1}^{m}$

$x \in E$

$\hookrightarrow x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$

$$y_j(x) = y_j\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underbrace{y_j(x_i)}_{\delta_{ij}} = \alpha_j$$

Figure 5-7 : Notes de cours de l'étudiant 1: présentation des notations utilisées

Ce qui suit fut noté au moment où le professeur expliquait le « rôle » des éléments de la base duale, en introduisant l'appellation « formes coordonnées ». Rappelons que l'exercice proposé dans $\mathbb{R}^2$ est le premier contexte dans lequel le professeur présentait l'utilité des formes coordonnées :

$\boxed{y_j}$: $E \longrightarrow \mathbb{K}$ formes "coordonnées"

$\alpha \longrightarrow \alpha_j$

$E = \mathbb{R}^2$

$X = \{(1,1), (1,-1)\}$

$E' = (\mathbb{R}^2)' = \{ y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire $\}$

$Y = \{y_1, y_2\}$

$y_1(1,1) = 1 \qquad y_2(1,1) = 0$

$y_1(1,-1) = 0 \qquad y_2(1-1) = 1$

$$\begin{cases} y_1(a_1, a_2) = \alpha a_1 + \beta a_2 \\ y_1(1,1) = \alpha + \beta = 1 \\ y_1(1,-1) = \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow \alpha = \frac{1}{2} = \beta$

$\longrightarrow y_1(a_1, a_2) = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2$

$$\begin{cases} y_2(a_1, a_2) = \alpha a_2 + \beta a_2 \\ y_2(1,1) = \alpha + \beta = 0 \\ y_2(1,-1) = \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

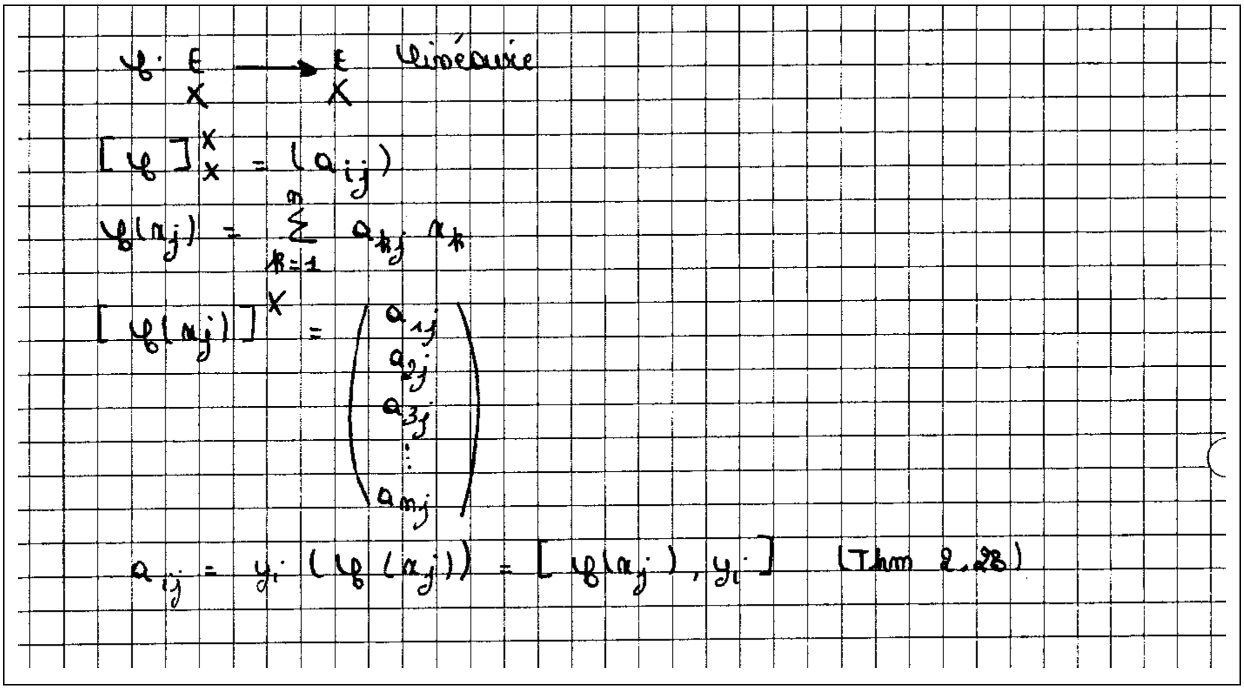
$\longrightarrow \alpha = \frac{1}{2} = -\beta$

$\longrightarrow y_2(a_1, a_2) = \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2$

Figure 5-8 : Notes de cours de l'étudiant 1: mise en œuvre des formes coordonnées dans un exercice

On peut remarquer qu'à part l'écriture des termes « formes coordonnées », aucune mention n'est faite dans ces notes de l'utilité des formes coordonnées. On peut remarquer que cet étudiant n'a pas pris la peine de noter la deuxième partie de l'exercice où le professeur a calculé les coordonnées du vecteur (3,5) dans la base considérée, en résolvant tout d'abord un système de deux équations à deux inconnues, avant d'illustrer la finalité outil des formes coordonnées. Cette illustration n'est donc pas présente dans les notes de l'étudiant 1.

Les notes prises par cet étudiant se poursuivent ensuite comme indiqué dans la Figure 5-9 :



$\varphi : \underset{X}{E} \longrightarrow \underset{X}{E}$ linéaire

$[\varphi]_X^X = (a_{ij})$

$\varphi(x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \, x_k$

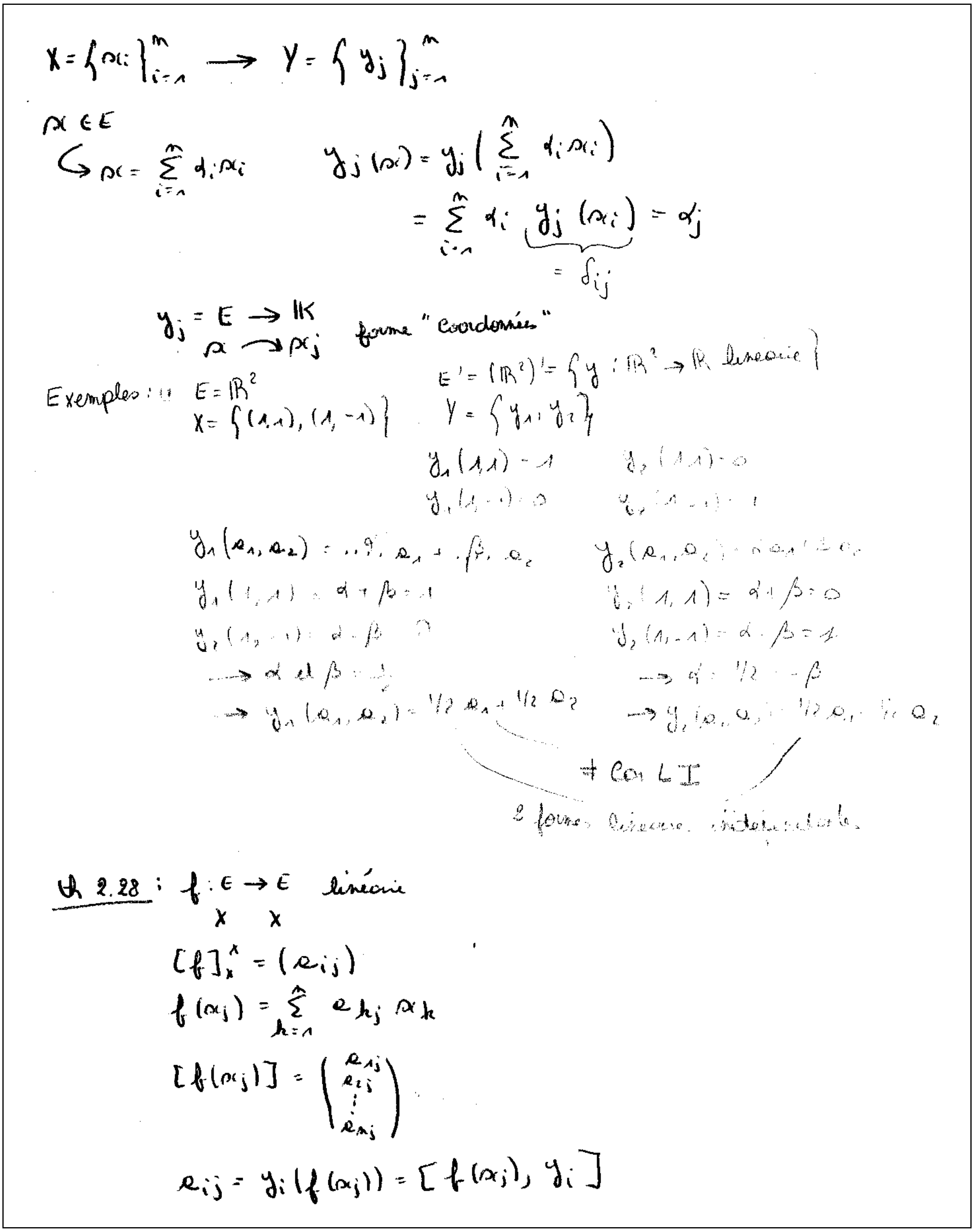
$[\varphi(x_j)]^X = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$a_{ij} = y_i(\varphi(x_j)) = [\varphi(x_j), y_i]$ (Thm 2.28)

Figure 5-9 : Notes de cours de l'étudiant 1: mise en œuvre des formes coordonnées dans un théorème

On reconnaît ici l'application de l'outil formes coordonnées que le professeur a voulu appliquer à la recherche des éléments d'une matrice d'une transformation linéaire par rapport à une base *X* (théorème 2.28 du cours théorique, qui représente le deuxième contexte d'application de l'outil formes coordonnées). Nous remarquons que l'étudiant n'a nulle part fait mention des termes « formes coordonnées » dans ses notes, alors que le professeur le mentionnait oralement pendant son exposé au cours théorique.

Analysons maintenant les notes du deuxième étudiant. La Figure 5-10 reprend l'ensemble des notes concernant la mise en œuvre qui a été faite au cours théorique de la fonctionnalité outil des formes coordonnées.


$X=\{x_i\}_{i=1}^{n} \longrightarrow Y=\{y_j\}_{j=1}^{n}$

$x \in E$

$\hookrightarrow x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \qquad y_j(x)=y_j\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \underbrace{y_j(x_i)}_{=\delta_{ij}} = \alpha_j$

$y_j : E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x_j$ forme "coordonnées"

Exemples : $E=\mathbb{R}^2$ $\qquad E'=(\mathbb{R}^2)'=\{y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ linéaire$\}$

$X=\{(1,1),(1,-1)\}$ $\qquad Y=\{y_1,y_2\}$

$y_1(1,1)=1 \qquad y_2(1,1)=0$

$y_1(1,-1)=0 \qquad y_2(1,-1)=1$

$y_1(e_1,e_2)=\alpha e_1+\beta e_2 \qquad y_2(e_1,e_2)=\alpha e_1+\beta e_2$

$y_1(1,1)=\alpha+\beta=1 \qquad y_2(1,1)=\alpha+\beta=0$

$y_1(1,-1)=\alpha-\beta=0 \qquad y_2(1,-1)=\alpha-\beta=1$

$\longrightarrow \alpha$ et $\beta=\frac{1}{2} \qquad \longrightarrow \alpha=\frac{1}{2}=-\beta$

$\longrightarrow y_1(e_1,e_2)=\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2 \qquad \longrightarrow y_2(e_1,e_2)=\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_2$

$\neq$ car LI

2 formes linéaires indépendantes

Th 2.28 : $f : \underset{X}{E} \to \underset{X}{E}$ linéaire

$[f]_X^X=(e_{ij})$

$f(x_j)=\sum_{k=1}^{n} e_{kj}x_k$

$[f(x_j)]=\begin{pmatrix} e_{1j}\\ e_{2j}\\ \vdots \\ e_{nj}\end{pmatrix}$

$e_{ij}=y_i(f(x_j))=[f(x_j),y_i]$

Figure 5-10 : Notes de cours de l'étudiant 2: mise en œuvre des formes coordonnées dans un exercice et un théorème

Remarquons tout d'abord que l'étudiant a noté x_j à la place de α_j dans la présentation des formes coordonnées (voir Figure 5-11). Nous pouvons nous poser la question de ce qu'il pourra en comprendre lorsqu'il relira ses notes.

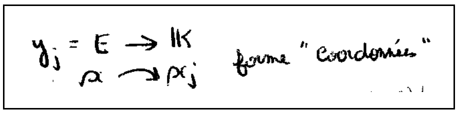


Figure 5-11 : Extrait des notes de l'étudiant 2

Ensuite, nous pouvons constater que dans l’extrait de la Figure 5-10 décrivant l’exercice présenté au cours, aucune note n’a été prise à partir du moment où le professeur a calculé les coordonnées du vecteur (3,5) dans la base considérée dans l’exercice. Le même constat ayant été fait dans les notes des deux étudiants, nous émettons l’hypothèse que ceux-ci, s’apercevant que le professeur proposait, en deuxième partie de l’exercice, une tâche relevant d’un type connu, à laquelle était appliquée une technique connue, n’ont pas jugé utile d’en prendre note, perdant du même coup l’illustration de l’utilité des formes coordonnées qui était présentée à la suite.

A l’instar de ce que nous avions constaté pour l’étudiant 1, dans la prise de notes de l’étudiant 2 ne figure pas non plus de référence à des formes coordonnées dans la partie consacrée au théorème 2.28 illustrant dans un deuxième contexte l’utilité des formes coordonnées.

En analysant les notes de cours de ces deux étudiants, nous pouvons donc constater que la fonctionnalité outil présentée par l’appellation « formes coordonnées » passe donc pratiquement inaperçue auprès des étudiants. En nous rappelant les objectifs déclarés du Prof.S., nous nous souvenons qu’il envisageait l’enseignement de la dualité comme un magnifique moyen de travailler l’abstraction. Pour lui, il ne s’agissait pas de prendre appui sur la dialectique outil-objet pour l’introduction des bases duales, mais il voyait en la fonctionnalité outil des formes coordonnées un outil de facilitation d’écriture à sa disposition. Le fait que les étudiants 1 et 2 ne gardent pas trace, dans leurs notes, de l’illustration de la fonctionnalité outil des formes coordonnées dans les deux contextes présentés au cours (exercice et théorème) tend à indiquer que ces étudiants ont intégré l’objectif implicite du Prof.S. de voir en la dualité un moyen de travail formel.

Nous faisons l’hypothèse que la présentation des bases duales au moyen de cette fonctionnalité outil, comme suggéré dans la proposition d’enseignement que nous avons faites (voir Annexe 10), pourrait aider à la prise en compte de cette fonctionnalité outil auprès des étudiants. Mais une telle présentation répondrait alors à des objectifs différents : la dualité ne serait plus uniquement le support à un travail abstrait.

5. Conclusions

Nous avons présenté dans ce chapitre diverses propositions d’enseignement de la dualité en algèbre linéaire. Certaines de ces formulations ont donné lieu à des dispositifs d’enseignement mis en place en première année d’université en mathématique et/ou en physique à l’université de Namur.

Parmi ces dispositifs, certains s’intéressaient à assoir des prérequis nécessaires à l’enseignement de la dualité, d’autres concernaient directement des thèmes de la dualité. Certains ont été mis en place dans le cadre de l’opération tremplin et des travaux de groupe, un autre a été partiellement repris au cours théorique.

Des données ont été recueillies et analysées suite à la mise en place de ces dispositifs. En ce qui concerne les dispositifs mis en place dans le cadre de l’opération tremplin et des travaux de groupe, les résultats semblent encourageants : les étudiants conçoivent majoritairement l’existence d’espaces fonctionnels et travaillent plus volontiers des tâches impliquant des thèmes de la dualité. Concernant le dispositif dont la mise en place a été proposée au cours théorique, les résultats sont interpellants et intéressants. En effet, en enseignant la dualité dans le cours d’algèbre linéaire, le professeur (Prof.S.) a pour objectif le travail formel. L’introduction de la fonctionnalité outil des bases duales (formes coordonnées) est utilisée par le Prof.S. afin de faciliter les écritures formelles, et non pour mettre en jeu une dialectique outil-objet pour l’introduction des bases duales. Les étudiants semblent percevoir cet objectif implicite de leur professeur, montrant ainsi une progression de leur entrée dans le contrat didactique institutionnel en vigueur.

Conclusions et perspectives

Dans notre travail de recherche, nous avons abordé la dualité en algèbre linéaire, portant ainsi plus avant les notions jusqu'alors étudiées par des travaux de didactique dans le domaine de l'algèbre linéaire. Nous allons maintenant rappeler les apports de notre travail, et lister ensuite quelques perspectives que ce dernier laisse entrevoir.

Lors de la présentation des différents cadres théoriques mobilisés dans nos travaux (chapitre 1), nous avons été amenée à approfondir la notion de contrat institutionnel (Chevallard 1989) en définissant plusieurs niveaux pour cette notion, établis en référence à l'échelle des niveaux de co-détermination didactique (Chevallard 2007). Nous avons ainsi mis en évidence un niveau générique, un niveau concernant la discipline et un niveau concernant un contenu particulier. Cet affinage de la notion de contrat nous permet d'interpréter certaines difficultés observées auprès des étudiants lors de l'apprentissage de la dualité en termes de changement de contrat didactique institutionnel.

Toujours en nous basant sur l'échelle des niveaux de co-détermination didactique, nous avons été en mesure de proposer une description du secteur dualité. Nous avons ainsi considéré comme thèmes du secteur dualité le *dual* (en tant qu'espace vectoriel), les *formes linéaires*, les *bases duales*, l'*application transposée* et les *annulateurs*. Nous avons aussi présenté, parmi les travaux didactiques déjà réalisés en algèbre linéaire, ceux dont nous nous sommes servie dans notre recherche et ceux qui abordent brièvement la dualité.

Une fois précisé le cadre de notre recherche, nous nous sommes intéressée à la question suivante :

- Comment ont émergé les notions associées à la dualité dans la genèse historique de l'algèbre linéaire ? Peut-on identifier des ruptures épistémologiques ?

Tout d'abord, nous avons montré que l'émergence de la notion de fonction, dont découle celle de forme linéaire présente dans le secteur dualité, a constitué une véritable rupture épistémologique dans l'histoire des mathématiques.

Nous avons aussi pu distinguer une approche de la dualité que nous avons qualifiée de *naturelle* de celle que nous avons dénommée *formelle*. Si la première de ces approches apparaît déjà dans les travaux de Frobenius (1875) et est à l'origine de la mise au jour de notions élémentaires en algèbre linéaire (Dorier 1997) dans le cadre de systèmes d'équations linéaires, l'approche formelle présentant la dualité comme un objet d'étude n'est apparue qu'au vingtième siècle, suite à une autre rupture épistémologique qu'a constitué l'introduction de l'algèbre linéaire dans le paysage mathématique.

L'approche formelle de la dualité n'est donc apparue qu'à la suite d'au moins deux ruptures épistémologiques dans l'histoire des mathématiques, dont une relativement récente. Sur base de ces faits, nous pouvons adjoindre l'adjectif *abstrait* à la notion de dualité.

Nous positionnant dans une perspective institutionnelle, nous nous sommes alors penchée sur la question suivante :

- Quelles structurations de la dualité peut-on proposer, en se référant au cadre théorique de la TAD ?

La perspective adoptée dans notre travail nous a conduite à nous intéresser aux différentes structurations possibles concernant le savoir relatif à la dualité, en fonction des niveaux considérés (Chevallard 2007). Nous avons présenté une analyse de manuels variés établissant ainsi, pour la dualité, une non-uniformité des organisations mathématiques présentées.

Au niveau global, l'analyse de l'organisation mathématique en rapport avec la dualité nous a amené à élargir la notion d'outil introduite par Douady dans une perspective épistémologique (1986). En effet, nous avons mis en évidence différentes finalités outil pour les notions en rapport avec la dualité, permettant ainsi de répondre à la question suivante :

- Quelles sont les différentes finalités outil qui peuvent être associées à la dualité en algèbre linéaire ?

Nous avons choisi de regrouper en cinq catégories les différentes finalités outil que l'analyse de manuels nous a ainsi permis de répertorier pour la dualité en algèbre linéaire. Il s'agit des finalités outil-analogie, outil-résolution, outil-illustration, outil-définition et outil-démonstration. Ces différentes finalités ne sont pas toutes de même nature : certaines se retrouvent davantage liées au bloc théorique ou au bloc pratique de praxéologies (Chevallard 2007), alors que d'autres n'ont pas de lien particulier avec un bloc de praxéologie. Le répertoire des différentes fonctionnalités-outil de la dualité ainsi établi peut être utile si l'on souhaite s'appuyer sur une dialectique outil-objet pour l'enseignement de la dualité en algèbre linéaire.

Sur la base des éléments établis dans les trois premiers chapitres de notre travail, nous avons élaboré une enquête à destination des étudiants inscrits en mathématiques ou en physique à l'université de Namur afin de tenter de cerner les difficultés des étudiants lors de l'apprentissage de la dualité. Ces étudiants ont, en effet, dans leur cursus de première année un cours d'algèbre linéaire où est enseignée la dualité en tant qu'objet. Un questionnaire et un travail de groupe ont été proposés aux étudiants de première année ; un questionnaire a été proposé aux étudiants de master. L'analyse des résultats de cette enquête a permis d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

- Quelle catégorisation peut-on établir pour les difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'apprentissage des notions liées à la dualité ?
- Quelles interprétations peut-on faire de ces difficultés, quelles hypothèses sur leurs causes ?

Nous avons choisi de catégoriser les difficultés apparues lors de l'analyse des réponses des étudiants à l'enquête en nous référant aux niveaux établis par Chevallard (2007). C'est ainsi que nous distinguons les difficultés liées à une maîtrise insuffisante de concepts élémentaires d'algèbre linéaire, les difficultés communes à l'algèbre linéaire élémentaire et à la dualité, et les difficultés propres à la dualité. Précisons que lorsque nous parlons de concepts *élémentaires* d'algèbre linéaire, il s'agit de concepts qui sont élémentaires par rapport aux notions de dualité qui sont ensuite étudiées.

Dans la première des catégories répertoriées, se retrouvent des difficultés liées à la notion de fonction, dont la cause est épistémologique. C'est aussi dans cette première catégorie qu'on peut situer les difficultés liées à un pauvre répertoire d'exemples d'espaces vectoriels à disposition des étudiants, dont la cause provient de la manière dont est enseignée la notion. La deuxième catégorie regroupe des difficultés communes à l'algèbre linéaire et à la dualité. Il s'agit de difficultés qui sont bien connues en algèbre linéaire (Dorier 1997), mais qui deviennent cruciales lorsqu'on aborde la dualité, comme par exemple la confusion entre un vecteur et ses coordonnées. Nous avons montré que les difficultés de ce type peuvent provenir du fait que les étudiants n'ont pas l'habitude de travailler avec des praxéologies complètes dans l'institution enseignement secondaire, le discours théorique relevant généralement de la responsabilité du professeur dans cette institution. Il s'agit de ce que Winsløw (2008) nomme une transition de premier type. Enfin, la troisième catégorie des difficultés répertoriées regroupe les difficultés propres à la dualité. Nous avons montré que nous pouvons interpréter ces difficultés par une transition du second type (Winsløw 2008) qui apparaît lorsque des éléments d'un bloc technologico-théorique d'une praxéologie deviennent des éléments d'un bloc practico-technique d'une autre praxéologie. Nous avons ainsi répondu à la question suivante :

- Peut-on parler de transition quand on aborde des notions de dualité ? Si oui, en quels termes ?

Lors de l'analyse des difficultés des étudiants en apprentissage de la dualité, nous avons également relevé le fait que les étudiants éprouvent des difficultés à considérer qu'un même objet puisse appartenir à des thèmes ou des secteurs différents.

Enfin, nous nous sommes intéressée à la question de la mise en place de dispositifs d'enseignement, dans l'institution université, à destination des étudiants en apprentissage de la dualité en algèbre linéaire, basés sur les résultats des analyses des difficultés des étudiants. Nous avons donc apporté des éléments de réponse à la question suivante :

- Peut-on mettre en place un dispositif d'enseignement, viable dans l'institution université, permettant d'aider les étudiants dans leur apprentissage de la dualité en algèbre linéaire ?

Ainsi, nous nous sommes attachée, dans un premier temps, à formuler des propositions pour l'introduction des notions de dualité en algèbre linéaire. Différentes motivations existent pour introduire la dualité en tant qu'objet dans un cours d'algèbre linéaire, débouchant sur différentes structurations du savoir à enseigner. Dans la formulation des propositions que nous avons élaborées, nous avons pris pour référence le cours d'algèbre linéaire de première année mathématique et physique à l'université de Namur. Dans un deuxième temps, parmi les propositions d'enseignement formulées, certaines ont été mises en place à l'université de Namur. Une analyse des données recueillies à propos des dispositifs et de leurs conséquences sur les étudiants a ensuite été présentée.

Nous tenons à souligner le fait que, vue la manière dont est positionné l'enseignement de la dualité dans l'université de Namur, son introduction n'est guère motivée. Il est en effet difficile de donner une réponse évidente à la question de savoir à quoi sert la dualité lorsqu'on l'enseigne en première année d'université. Bien entendu, la position de l'enseignement de ce secteur de l'algèbre linéaire pourrait être déplacée plus loin dans le cursus universitaire d'un étudiant, auquel cas les propositions pour son enseignement seraient différentes de celles formulées dans ce travail.

Plusieurs perspectives s'ouvrent à la suite de notre travail, notamment :

- **En ce qui concerne la dualité ou l'algèbre linéaire en général :**
  - Comme nous l'avons mentionné au chapitre 2, une exploration de l'œuvre de Grassmann en ce qui concerne la dualité apporterait certainement un apport intéressant à l'étude de ce secteur ;
  - De même en serait-il d'un approfondissement de la réflexion sur le lien entre la dualité, au sens actuel, et la conceptualisation par Frobenius de la notion de rang, dans le cadre des systèmes d'équations ;
  - Les représentations des droites et des plans ont été présentés dans l'institution enseignement secondaire du point de vue « cartésien » et « paramétrique » (Alvès-Diaz 1998). Les connaissances de ces représentations sont-elles mobilisables pour l'introduction de la dualité ?
  - Plus généralement, on pourrait initier un enseignement de la dualité sur base du travail préparatoire proposé en introduction à l'enseignement formel de l'algèbre linéaire développé à Lille (voir chapitre 1, § 3.2.c) ;
  - Il serait intéressant de pouvoir tester le dispositif « bases duales » dans son ensemble et d'essayer d'en mesurer les effets ;
  - Il en va de même pour la proposition d'introduction de l'application transposée présentée en Annexe 7 ;
  - Afin de recueillir davantage de données sur les dispositifs d'enseignement proposés au chapitre 5, nous pourrions proposer, d'ici quelques années, le questionnaire « master » aux étudiants ayant suivi ces dispositifs lorsqu'ils étaient en première année d'université ;
  - Bien que nous nous soyons basée sur une variété de manuels, nous n'avons pris en compte que le point de vue du professeur à qui nous avions proposé le dispositif « bases duales ». Nous pourrions étendre notre recherche en questionnant différents professeurs ayant choisi de présenter la dualité dans un cours d'algèbre linéaire ;
  - Nous pourrions poursuivre la recherche menée sur la dualité en algèbre linéaire à une recherche sur la dualité dans d'autres domaines mathématiques, et tenter d'établir les transitions qui pourraient ainsi exister ;
  - En se basant sur la genèse historique de l'algèbre linéaire, il serait intéressant de travailler et proposer des questions qui motivent la présence de ce domaine des mathématiques dans le cursus universitaire d'une formation scientifique, et notamment des questions dont la réponse nécessite la dualité. Plus généralement, une réorganisation globale de l'enseignement de l'algèbre linéaire pourrait être envisagée, que celle-ci inclue ou non la dualité, en tenant compte de la diversité de pratiques didactiques déjà mises en œuvre. Parmi celles-ci, on pourra notamment se référer à l'Université en Ligne et le Premier cycle sur mesure (Pcsm)[70], produits par le Réseau

[70] Le programme est consultable en ligne à l'adresse http://www.uel-pcsm.education.fr.

Universitaire des Centres d'Autoformation (RUCA), qui regroupe une vingtaine d'Universités françaises[71].

- **En ce qui concerne des approfondissements théoriques :**

Au-delà des thématiques citées ci-avant, un travail d'élaboration théorique est à poursuivre. En particulier, nous souhaiterions approfondir le positionnement des niveaux micro-macro que nous avons introduits.

En effet, parmi les dispositifs présentés et mis en place à l'université de Namur, l'un d'eux fait intervenir ce que nous avons appelé le *niveau micro* et le *niveau macro* d'un même objet (chapitre 5, § 1.2.c). Nous avons introduit ces niveaux en tant qu'outils *méta* (Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 1997a) pour les étudiants, et non comme des concepts théoriques. En effet, nous avons introduit les niveaux micro-macro dans une proposition d'enseignement en réponse à la difficulté éprouvée par les étudiants lorsqu'ils sont confrontés à une notion relevant de différents thèmes ou secteurs, bien que nous restons consciente de la relativité avec laquelle peuvent être définis les thèmes et secteurs d'une discipline mathématique. Dans notre travail, les niveaux micro-macro n'ont pas fait l'objet d'une définition formelle, indépendante du contexte de la proposition d'enseignement. Nous n'avons d'ailleurs illustré ces deux niveaux qu'à travers les applications linéaires (et les formes linéaires qui en sont un cas particulier) et les équations linéaires.

Nous nous interrogeons maintenant sur la position que pourraient prendre ces niveaux micro-macro par rapport à d'autres cadres théoriques. Pour ce faire, rappelons-nous que différents points de vue existent pour envisager la transition secondaire-université, et notamment :

- Un regard psychologique et épistémologique : la transition est définie comme un passage *du concret vers le plus abstrait*. On retrouve dans cette catégorie la théorie APOS (Dubinsky 1991). On serait alors tenté d'associer le niveau micro au stade du Processus défini dans cette théorie, et le niveau macro au stade de l'Objet. En effet, si nous considérons une fonction par exemple, le niveau micro correspond à une première appréhension de cette notion : il s'agit d'un triplet, comprenant un ensemble de départ, d'arrivée, et un graphe correspondant à l'ensemble des couples (élément de l'ensemble de départ, élément de l'espace d'arrivée) qui sont mis en relation par la fonction. Ce niveau pourrait donc correspondre au stade de Processus. Le passage par le premier niveau est nécessaire avant de pouvoir prendre du recul et passer à la vision macro présentant une fonction comme un élément pouvant être considéré comme un élément d'un espace vectoriel, c'est-à-dire un vecteur. On pourrait donc associer ce niveau au stade de l'Objet qui est atteint dans la théorie APOS après intériorisation de la part du sujet. Mais les associations (niveau micro – Processus) et (niveau macro – Objet) ne rencontrent pas entièrement l'utilisation que nous avons faite des niveaux micro-macro. En effet, si nous nous positionnons dans la théorie APOS, concevoir une fonction au niveau micro demande aussi qu'il y ait qu'il y ait eu intériorisation du Processus pour créer l'Objet « fonction considérée au niveau micro ». Parallèlement, dans la théorie APOS, pour arriver au stade d'Objet, la « fonction considérée au niveau macro » a dû passer par le stade Action et le stade Processus.

[71] Remarquons que le thème « Introduction géométrique à l'algèbre linéaire » a été réalisé par l'université de Lille.

- Un regard sur les pratiques mathématiques : la transition est davantage présentée comme liée à la notion de *flexibilité*. La dialectique outil-objet (Douady 1986) relève de cette catégorie. Nous pourrions positionner le niveau micro au niveau du statut d'outil, et le niveau macro au niveau du statut d'objet. En effet, en reprenant l'exemple d'une fonction, on peut la concevoir au niveau micro comme une *machine* transformant un élément de l'espace de départ en un élément de l'espace d'arrivée ; un outil en quelque. Le niveau macro correspond à un stade plus abstrait, considérant la fonction comme un élément appartenant à un ensemble muni de lois : un espace vectoriel. A ce niveau, la fonction est décontextualisée : on ne spécifie plus explicitement son espace de départ ni son espace d'arrivée, ni même son graphe. C'est en ce sens qu'on pourrait associer le niveau macro au statut d'objet (Douady 1986). Mais ces associations (niveau micro – outil) et (niveau macro – objet) ne correspondent pas exactement à ce que nous avons voulu introduire. En effet, une fonction considérée au niveau macro (élément d'un espace vectoriel) peut également avoir le statut d'outil si nous considérons le cas particulier d'une forme linéaire faisant partie de la base duale d'une base donnée dans le primal (Chapitre 1, § 2.3 et Chapitre 3, § 1.1).

- Un regard institutionnel : la transition s'exprime sous forme d'attentes différentes (contrat institutionnel) et est présentée par Winsløw (1998) sous deux types, définis par rapport aux praxéologies décrites dans la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD, Chevallard 2007). L'échelle des niveaux de co-détermination didactique (chapitre 1, § 1.4) nous permet de situer les niveaux micro-macro par rapport à la TAD. En effet, ces niveaux ont été introduits suite à la constatation qu'une même notion pouvait appartenir à des secteurs différents **et** que les thèmes et sujets qui peuvent lui être associés dans ces différents secteurs ne présentent pas (ou peu) de points communs. Dans le cadre de la TAD, nous pourrions alors proposer un *troisième* type de transition qui apparaîtrait lorsque, pour pouvoir présenter une notion d'un secteur particulier, il est nécessaire de concevoir préalablement qu'elle est rattachée à différents thèmes, secteurs voire domaines des mathématiques. Faut-il parler de transition de 3ème type ou de flexibilité entre thèmes-secteurs-domaines ? Nous laissons la question ouverte dans une perspective de continuation des travaux entrepris dans notre recherche.

Plus généralement, nous souhaiterions contribuer au développement des concepts de nature à éclairer la transition entre l'enseignement secondaire et l'université.

Bibliographie

Alvès-Dias M. (1993). *Contribution à l'analyse d'un enseignement expérimental d'algèbre linéaire en DEUG A première année*. Mémoire de DEA, Université de Paris 7.

Alvès-Dias M. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat. Université de Paris 7.

Artigue M. (2006). Apprendre les mathématiques au niveau universitaire : ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, **11**, 269-288.

Artigue M. (2009). Rapports et articulations entre cadres théoriques : le cas de la théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* **29/3**, 305-334.

Assude T., Gelis J.-M. (2002). La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-Géomètre à l'école primaire, *Educational studies in mathematics,* **50/3**, 259-287.

Baudet J. (2002). *Nouvel abrégé d'histoire des mathématiques*. Vuibert, Paris.

Birkhoff G., Mac Lane S. (1941). *A survey of Modern Algebra.* MacMillan, New-York.

Bloch I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances, et conditions relatives à la validation*. Thèse de doctorat Université Bordeaux I.

Bloch I., Ghedamsi H. (2004). The teaching of calculus at the transition between upper secondary school and university. *Actes du colloque ICME 10*. Copenhague, Danemark.

Bosch M., Gascón J. (2003). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Margolinas Cl., Mercier A. (ed.), *Balises en didactique des mathématiques, Cours de la XII^ième^ école d'été de didactique des mathématiques,* 107-122. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bosch M., Fonseca C., Gascón J. (2004). Incompletud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques,* **24/2-3**, 205-250.

Bridoux S. (2009). Une séquence d'introduction des notions de topologie dans $\mathbb{R}^n$: de la conception à l'expérimentation. *Actes du colloque EMF 2009*. Dakar, Sénégal.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques,* ***7/2****, 33-115.*

Brousseau G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1989). *Le concept du rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel*. Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, 211-235. LSD-IMAG Grenoble.

Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (ed.), *Actes de la 11^ième^ école d'été de didactique des mathématiques*, 3-22. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Actes du premier congrès de la théorie anthropologique du didactique (Baeza), Universidad de Jaén, 705-746.

De Guzman M., Hodgson B.R., Robert A., Villani V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. *Documenta mathematica*, extra volume ICM 1998.

De Vleeschouwer M. (2008). *Aider les étudiants à entrer dans un nouveau contrat didactique institutionnel en mathématiques ? L'exemple de l'opération tremplin à l'université de Namur.* Actes du 5^ème^ colloque Questions de Pédagogie dans l'Enseignement Supérieur (QPES 5), 7-13. Brest, France.

Dhombres J. (1987). *Mathématiques au fil des âges*. Gauthier-Villars, Paris.

Dieudonné J. (1986). *Abrégé d'histoire des mathématiques*. Hermann, Paris.

Dorier J.-L. (1990). Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A en algèbre linéaire. Cahier DIDIREM, 6. IREM de Paris 7.

Dorier J.-L. (1993). L'émergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires. *Cahier du séminaire d'histoire des mathématiques* (2ème série) **3**, 159-190.

Dorier J.-L. (1997) Ed. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La pensée sauvage, Grenoble.

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J., Rogalski M. (1997a). A propos du levier « Méta ». In Dorier J.-L. (ed.), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, 185-213. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J., Rogalski M. (1997b). L'algèbre linéaire : l'obstacle du formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. In Dorier J.-L. (ed.), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, 231-247. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Dorier J.-L. (2000). *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire. Perspectives théoriques sur leurs interactions*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, **7/2**, 5-32.

Dreyfus T. (1999). Why Johnny can't prove, *Educational studies in mathematics*, **38**, 85-109.

Drouin A.-M. (1991). *A propos de l'expression : l'enfant épistémologue*. ASTER **12**, 27-37.

Dubinsky E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall D. (ed.), *Advanced mathematical thinking*, 95-126. Kluwer academic publishers, Dordrecht.

Dubinsky E., Mc Donald M. (2001). APOS: A constructive theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Holton D. (ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang, Berne.

Edwards B., Dubinsky E. & Mc Donald M. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and learning*. **7/1**, 15-25.

Gray E., Pinto M., Pitta D., Tall D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational studies in mathematics*, **38**, 111-133.

Gueudet G. (2000). *Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Gueudet G. (2008). La transition secondaire-supérieur : résultats de recherches didactiques et perspectives. In Rouchier A. et Bloch I. (ed.), *Perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIIIème école d'été de didactique des mathématiques*, 159-175. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Halmos P. (1942). *Finite-dimensional vector spaces*. Princeton, University Press.

Harel G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In Dorier J.-L. (ed.) *On the teaching of linear algebra*, 177-189. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Hauchecorne B. (2003). *Les mots et les maths. Dictionnaire historique et épistémologique du vocabulaire mathématique*. Ellipses, Paris.

Hillel J. (1997). Des niveaux de description et du problème de la représentation en algèbre linéaire. In Dorier J.-L. (ed.), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, 231-247. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Houart M. (2008). Evaluation qualitative du programme par les étudiants. In *Evaluation du cursus de bachelier en mathématique*, 11-19. Rapport interne à la Faculté des Sciences des FUNDP, Namur, Belgique.

Kline M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York.

Lang S. (1986). *Introduction to Linear Algebra*, 2nd edition. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New-York.

Lang S. (2002). *Algebra*, revised 3rd edition. Graduate Texts in Mathematics, Springer, New-York.

Mac Lane S. et Birkhoff G. (1971). *Algèbre 2 Les grands théorèmes*. Gauthier-Villars éditeur, Paris.

Nardi E., Iannone, P. (2005). To appear and to be: Acquiring the ‘genre speech’ of university mathematics. In Bosch M. (ed.), *Proceedings of the 4th Conference on European Research in Mathematics Education*. Sant Feliu de Guixols, Spain.

Praslon F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat, Université de Paris VII Denis Diderot.

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, **22**, 1-36.

Sierpinska A. (2000). On some aspects of student’s thinking in linear algebra. In Dorier J.-L. (ed.) *On the teaching of linear algebra*, 209-246. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Robert A., Robinet J. (1989). *Quelques résultats sur l’apprentissage de l’algèbre linéaire en première année de DEUG*. Cahier de Didactique des Mathématiques 53. IREM de Paris 7.

Robert A. (1997). Niveaux de conceptualisation et enseignement secondaire. In Dorier J.-L. (ed.), *L’enseignement de l’algèbre linéaire en question*, 149-157. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Robert A. (1998). Outils d’analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l’université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **18/2**, 139-190.

Rogalski M. (1991). *Un enseignement de l’algèbre linéaire en DEUG A première année.* Cahier de Didirem, **11**. IREM de Paris 7.

Rogalski M. (1994). L’enseignement de l’algèbre linéaire en première année de DEUG A. *La Gazette des Mathématiciens* **60**, 39-62.

Rogalski M. (1997). L’enseignement d’algèbre linéaire expérimenté à Lille. In Dorier J.-L. (ed.), *L’enseignement de l’algèbre linéaire en question*, 159-184. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Ryve A. (2004). Can collaborative concept mapping create mathematically productive discourses? *Educational Studies in Mathematics*, **56/2-3**, 157-177.

Sarrazy B. (1995). Le contrat didactique. *Revue Française de pédagogie*, Note de synthèse **112**, 85-118.

Tall D. (1991). Refections, in Tall D. (ed.). *Advanced mathematical thinking*, 251-259. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Thiry S. (2004). *Rapport d’activité du Groupe d’aide à la Transition (GAT)*. Rapport interne à la Faculté des Sciences des FUNDP, Namur, Belgique.

Trigueros M., Oktaç A. (2005). La théorie APOS et l’enseignement de l’algèbre linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, **10**, 157-176. IREM de Strasbourg.

Winsløw C. (2008). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l’abstrait en analyse réelle. In Rouchier A. et Bloch I. (ed.), CD-Rom. *Perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIIIème école d’été de didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Livres analysés

Escofier J.-P. (2006). *Toute l’algèbre de la licence*. Dunod Editions.

Etienne D. (2006). *Exercices corrigés d’algèbre linéaire*. Bruxelles : De Boeck.

Grifone J. (2002). *Algèbre linéaire*, 2ème Edition. Cépaduès Editions

Halmos P. (1974). *Finite-dimensional vector spaces*. New-York: Springer-Verlag.

Lang S. (1987). *Linear Algebra*, 3rd edition. New-York: Undergraduate Texts in Mathematics, Springer.

Lax P. (2007). Linear *Algebra and its applications*, 2nd edition, New-Jersey: Wiley&Sons.

Mac Lane S. et Birkhoff G. (1971). *Algèbre 1 Structures fondamentales*. Paris : Gauthier-Villars éditeur.

Merlin X. (1995). *Methodix, algèbre*. Paris : Edition Marketing (ellipses).

Pham F., Dillinger H. (1996). *Algèbre linéaire*. Diderot Editeur, Arts et Sciences.

Toint Ph.. (2007). *Algèbre, notes de cours destinées aux étudiants de première baccalauréat en mathématique et physique*. Namur : Librairie des Sciences, Université de Namur.

Uhlig F. (2002). *Transform Linear Algebra*. New Jersey :Prentice Hall.

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE

Enseignement à l'Université, perspective institutionnelle et contrat didactique.
Le cas de la dualité en algèbre linéaire

ANNEXES

Thèse présentée par
Martine DE VLEESCHOUWER
en vue de l'obtention du grade
de Docteur en Sciences

Composition du Jury :

Jean-Luc DORIER
Ghislaine GUEUDET (Directeur)
Valérie HENRY
Marc ROMAINVILLE
Suzanne THIRY (Promoteur)
Carl WINSLØW

Septembre 2010

© Presses universitaires de Namur & Martine De Vleeschouwer
Rempart de la Vierge, 13
B - 5000 Namur (Belgique)

Toute reproduction d'un extrait quelconque de ce livre,
hors des limites restrictives prévues par la loi,
par quelque procédé que ce soit, et notamment par photocopie ou scanner,
est strictement interdite pour tous pays.

Imprimé en Belgique

ISBN : 978-2-87037-691-1
Dépôt légal: D / 2010 / 1881 / 38

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix
Faculté des Sciences
rue de Bruxelles, 61, B-5000 Namur, Belgium

TABLE DES MATIERES DES ANNEXES

Annexe 1. Description des livres et manuels analysés au Chapitre 3

Nous présentons ici brièvement les manuels que nous avons retenus en vue d'analyser la dualité comme savoir à enseigner (Chapitre 3). Rappelons que notre souci n'a pas été l'exhaustivité, mais une variété de présentations des notions de dualité. Nos choix pour les manuels retenus seront brièvement expliqués au fur et à mesure des descriptions.

1. Le polycopié de Toint

Le polycopié intitulé "*Algèbre*" (Toint 2007, 219 pages, Belgique), rédigé par Philippe Toint, professeur au département de mathématiques à l'université de Namur, est le support des notes du cours d'algèbre linéaire que suivent les étudiants inscrits en première année mathématique ou physique à l'université de Namur en Belgique (voir Annexe 4 pour un plan de ce cours). Ce manuel reprend les motivations, illustrations, définitions et théorèmes concernant les notions vues au cours théorique.

Il est complété par un recueil d'exercices reprenant des exercices répertoriés par chapitre selon les notions visées. L'avant dernier chapitre du recueil d'exercices est consacré à des exercices récapitulatifs, et le dernier chapitre reprend les tests et examens écrits des deux dernières années académiques.

Ces notes de cours s'adressent donc à des étudiants en fin de cycle du secondaire, et ne requièrent aucune notion préliminaire d'algèbre linéaire.

2. Le livre de Halmos

"*Finite-Dimensional Vector Spaces*", de Paul R. Halmos (Halmos 1974, 200 pages, Etats-Unis) est le livre dont s'est principalement et initialement inspiré Ph. Toint pour la rédaction du polycopié associé à son cours d'algèbre linéaire à l'université de Namur. La seconde édition de ce livre, datant de 1958 et rééditée en 1974, se distingue de la première (datant de 1942) principalement par le nombre d'exercices présentés. Ces derniers sont positionnés tout au long du livre, regroupés à la fin de sections de chapitres.

Dans sa préface, l'auteur annonce que le but qu'il poursuit est de traiter les transformations linéaires (sur des espaces vectoriels de dimension *finie*) par le biais de méthodes de théories plus générales, tout en essayant d'adopter une vision géométrique. Le livre ne demande pas de prérequis particulier pour qui veut s'initier à l'algèbre linéaire par son intermédiaire.

De plus, la première édition de ce livre a une composante historique : le livre d'Halmos est, avec le livre "*Survey of Modern Algebra*" de Birkhoff & Mac Lane édité en 1941, l'outil qui a permis la diffusion des idées propres à l'algèbre linéaire auprès des chercheurs et dans l'enseignement universitaire de l'époque (Dorier 1997, p.95).

Ce manuel est analysé plus en détail au chapitre 3, § 2.2.

3. Le livre de Birkhoff & Mac Lane

Le livre de G. Birkhoff et S. Mac Lane, composé de deux volumes (1er volume : Birkhoff & Mac Lane 1971, 408 pages, France), a été sélectionné pour la raison historique présentée à la section ci-avant. Cependant, pour notre analyse, nous n'avons pas considéré la première édition du livre de Birkhoff & Mac Lane dont il est fait mention ci-avant (§ 2). Nous avons privilégié la traduction de la troisième édition, datant de 1971. En effet, cette troisième édition a permis de corriger et d'améliorer le texte initial, l'esprit de l'ouvrage restant par ailleurs le même. De fait, les auteurs présentent une approche très axiomatique de l'algèbre. La notion de dualité y est tout d'abord présentée par le biais du dual d'un diagramme, puis du dual d'un module, le dual d'un espace vectoriel en étant alors un produit dérivé.

La traduction française de la troisième édition se présente sous deux volumes, le premier reprenant les chapitres 1 à 9 dans un tome intitulé "Structures fondamentales". Le deuxième tome, "Les grands théorèmes", reprend la traduction des chapitres 10 à 16 de l'ouvrage original "Algebra", à laquelle les auteurs ont ajouté un chapitre supplémentaire sur la "Théorie de Galois". Lors de notre analyse, nous nous sommes concentrée sur le premier volume.

4. Le livre de Grifone

Nous avons également considéré "*Algèbre Linéaire - 2e édition*", de Joseph Grifone (Grifone 2002, 416 pages, France). Partant du constat selon lequel les programmes actuels de l'enseignement dans le secondaire ne comportent presque plus d'algèbre linéaire, Grifone se sert de son expérience de plusieurs années d'enseignement de l'algèbre linéaire en premier cycle d'université pour essayer de combler cette lacune.

Les différentes notions sont présentées de façon à mettre en évidence leur raison d'être et leur utilité. Une attention particulière est portée sur la signification géométrique. Chaque notion et chaque énoncé sont illustrés par des exemples (présentés dans différents cadres) et des exercices résolus. Chaque chapitre se termine par une série d'énoncés d'exercices se rapportant à l'entièreté du chapitre (toutes sections confondues), suivie ensuite par une série d'indications se rapportant à ces énoncés.

5. Le livre d'Escofier

"*Toute l'algèbre de la licence : Cours et exercices corrigés*", de Jean-Pierre Escofier (Escofier 2006, 674 pages, France) est, dans sa seconde édition[1], un ouvrage récent. Il reprend l'ensemble des notions d'algèbre abordées dans les trois premières années d'université d'un étudiant de mathématique. L'auteur, constatant que les notions élémentaires en mathématiques ne font généralement pas l'objet d'attentions particulières, a écrit ce livre à l'intention d'étudiants « à l'aise et moins à l'aise en mathématiques », en espérant transmettre à ces derniers le goût pour les mathématiques.

Les notions présentées sont accompagnées de récits et d'anecdotes historiques, ainsi que d'applications récentes. Chaque chapitre se termine par des énoncés d'exercices (statuts variés et cadres différents), suivis ensuite par la résolution détaillée de ceux-ci.

Ce manuel est analysé plus en détail au chapitre 3, § 2.2.

6. Le livre de Pham & Dillinger

Le livre de F. Pham et de H. Dillinger (Pham & Dillinger 1996, 347 pages, France) a été sélectionné pour l'approche différente qu'il présente par rapport aux autres ouvrages déjà cités. Dans leur "Avertissement au lecteur", les auteurs annoncent que leur but n'est pas de transmettre des techniques mais bien des idées, des concepts qui pourront être utiles pour résoudre d'autres problèmes. Ils indiquent également que, bien que présenté de manière originale, le contenu du livre correspond au programme traditionnel d'un cours d'algèbre de

[1] La première édition date de 2002.

première année d'université, et que le slogan "*dualité entre géométrie et calcul*" résume leur principale préoccupation.

Ce manuel est analysé plus en détail au chapitre 3, § 2.2.

7. Le livre de Lax

Le livre de Peter D. Lax a pour titre "*Linear Algebra and its applications*". Sa deuxième édition est très récente (2007, 376 pages, Etats-Unis).

Dans sa préface, l'auteur précise que cet ouvrage constitue un support confortable pour un cours complémentaire[2] sur l'algèbre linéaire, supposant donc que le lecteur a déjà eu l'occasion de se confronter aux premières notions d'algèbre linéaire.

L'intérêt de cet ouvrage réside non seulement dans la présentation qui y est faite de la dualité, mais également dans les applications de celle-ci qui y sont présentées.

8. Le livre de Lang

On pourrait affirmer que Serge Lang a écrit une trilogie sur l'algèbre linéaire, si l'on considère " *Introduction to Linear Algebra* " (1986), " *Linear Algebra* " (1987), " *Algebra* " (2002). Les deux premiers livres cités sont du niveau des premières années d'université, alors que le troisième livre, " *Algebra* ", est à destination de personnes ayant déjà été confrontées à l'algèbre ou ayant une maturité mathématique appropriée. Ce dernier ouvrage est du niveau *graduate*.

L'auteur n'introduit pas la dualité dans "*Introduction to Linear Algebra*" (1986), il n'y fait mention que de la transposée d'une matrice, sans aucun lien avec la dualité. C'est dans "*Linear Algebra*" (1987) que la dualité est présentée en algèbre linéaire. Dans le troisième ouvrage de Lang considéré, "*Algebra*" (2002), la dualité y est aussi présentée dans un cadre plus vaste (groupe dual, module dual, …) étant donné le caractère spécifique de cet ouvrage.

Etant donné le sujet de notre recherche, nous nous sommes concentrés sur le deuxième ouvrage de Lang (1987, 296 pages, Etats-Unis) présenté ici.

9. Le livre de Merlin

Xavier Merlin, dans son livre "*Methodix - Algèbre : 250 méthodes, 250 exercices corrigés*" (Merlin 1995, 400 pages, France) présente une liste de méthodes, qui peut être interprétée comme un cours "orienté exercices". Il consacre un chapitre entier à la dualité. La démarche est originale, et l'auteur précise tout de même qu'il ne suffit pas de connaître une méthode, encore faut-il savoir quand elle s'applique ou quand elle est inopérante...

Ce manuel est analysé plus en détail au chapitre 3, § 2.2.

10. Le livre d'Etienne

Le livre de Damien Etienne, intitulé "*Exercices corrigés d'algèbre linéaire - tome 2*" (Etienne 2006, 359 pages, Belgique) est également un ouvrage récent. L'auteur a tiré profit de son expérience de plusieurs années d'enseignement de l'algèbre linéaire en licences scientifiques (France) pour la rédaction de cet ouvrage. Le tome 2 est bien évidemment précédé d'un premier tome, mais l'auteur a choisi de placer le secteur dualité dans le deuxième tome. La plupart des chapitres de ces deux ouvrages sont construits de la même manière : une première

[2] « …a second course on the subject » [Lax, 2007, p. xi]

partie reprenant quelques rappels de cours, suivie par une section reprenant des énoncés d'exercices, dont la correction est présentée dans la troisième partie du chapitre.

Comme le titre du livre le laisse percevoir, cet ouvrage est centré essentiellement sur les exercices.

11. Le livre de Uhlig

Ce livre (Uhlig 2002, 503 pages, Etats-Unis) est destiné à des étudiants d'un niveau débutant ou intermédiaire, dans un parcours scientifique. L'ouvrage a pour but d'aider les étudiants à développer une compréhension intuitive de l'algèbre linéaire et de leur présenter des concepts qui sont à l'origine de ce domaine des mathématiques.

Ce livre adopte une présentation non formelle de la dualité. On n'y parle d'ailleurs pas d'espace vectoriel dual. L'ouvrage d'Uhlig met l'accent sur des concepts d'algèbre linéaire et de théorie des matrices. Ainsi par exemple la notion de *rang* est introduite par la définition du rang d'une matrice A d'un système d'équations linéaires ($Ax = b$) comme étant le nombre de pivots dans la forme échelonnée par ligne[3] de la matrice A. Par conséquent, ce manuel ne sera pas analysé de la même manière que les autres ouvrages présentés ci-dessus ; mais il nous semblait intéressant d'en parler étant donnée l'omniprésence de l'approche naturelle[4] de la dualité dans l'ouvrage.

L'ouvrage a à l'esprit les applications de l'algèbre linéaire. C'est pourquoi la plupart des chapitres sont divisés en trois sections : la première reprenant le contenu d'un cours, suivi de problèmes ; la deuxième présentant des apports théoriques et mathématiques ; et la dernière partie présentant des applications d'algèbre linéaire.

Ce manuel est analysé plus en détail au chapitre 3, § 2.2.

[3] Les éléments a_{ij} d'une matrice (p,q) échelonnée par ligne sont tels que $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$, où $i = 1,\ldots, p$ et $j = 1,\ldots, q$.
[4] Voir Chapitre 2, § 4.6.

Annexe 2. Analyse synthétique et comparative de la dualité dans les manuels analysés

Cette annexe vient détailler ce qui est présenté en introduction au chapitre 3. Nous avons analysé, dans un premier temps, la manière dont le secteur dualité s'insère dans l'organisation des différents manuels considérés. Ensuite, nous avons regardé les parties de manuels où intervenait la dualité. Nous présentons ici une synthèse des résultats observés.

1. Section consacrée explicitement à la dualité

Le fait que la dualité soit présentée dans un *chapitre à part entière* dans un manuel pourrait créer ou accentuer l'idée d'un secteur isolé dans le domaine de l'algèbre linéaire. De plus, la *position relative* de la dualité par rapport à l'étendue du manuel peut nous renseigner sur la quantité de prérequis nécessaires à cette matière ou sur le degré de difficulté atrribué à cette matière par l'auteur. Enfin, le nombre de pages consacrées à la présentation de la dualité, ainsi que ce que ces pages représentent par rapport à l'entièreté du livre peut nous renseigner sur l'étendue de la description du secteur dans le manuel.

Nous nous posons donc les questions suivantes :

Dans les divers manuels analysés, le secteur dualité occupe-t-il un chapitre à part entière? Quelle est la position relative de l'apparition de la dualité dans le manuel? Quelle place relative occupe la section (chapitre) consacrée à la dualité à l'intérieur du manuel?

Remarquons que, vu la spécificité de l'ouvrage de Uhlig (2002), ce manuel ne sera pas analysé dans cette section. En effet, dans ce manuel, la dualité n'est pas présentée en tant qu'objet. Le concept est omniprésent dans les propos de l'auteur, mais il n'est pas formalisé : l'auteur ne parle pas par exemple d'espace vectoriel dual ou de base duale…

Dans le tableau ci-dessous, la première colonne reprend les noms des auteurs des manuels analysés. Le lecteur trouvera ensuite en deuxième colonne la réponse à la première des trois questions posées ci-dessus; dans les 3 colonnes suivantes la réponse à la deuxième de ces questions; et enfin les deux dernières colonnes permettent de répondre à la troisième question posée :

	Chapitre à part entière	***Nombre de pages (total) du manuel***	***Apparition du secteur dualité :***	***Position relative de la dualité***	***Etalé sur ... pages***	***Qui représentent, par rapport à l'entièreté du livre:***
Toint	Non (∈ chap.2 Applications)	219	Page 43	19.6%	9	4.1%
Halmos	Non (∈ chap.1 Spaces)	200	Page 20	10%	11+8	9,5%
Birkhoff & Mac Lane1	Non (∈ chap.7 Espaces vectoriels)	408	Page 36 (diagramme) Page 248 (module) Page 275 (esp.vect.)	67.4%	3+10+7	4.9%
Grifone	Non (∈ chap.3 Applications linéaires et	416	Page 82	19,7%	10 (ex. inclus)	2,4%

	Chapitre à part entière	*Nombre de pages (total) du manuel*	*Apparition du secteur dualité :*	*Position relative de la dualité*	*Etalé sur ... pages*	*Qui représentent, par rapport à l'entièreté du livre:*
	matrices					
Escofier	Oui	196 (première année)	Page 181	92,3%	13	6,6% (première année)
		674 (tout le livre)		26,8%		1,9% (tout le livre)
Pham & Dillinger	Non (∈ chap3 Dualité entre géométrie et calcul)	347	Page 127	36.6%	23	6.6%
Lax	Oui	376	Page 13	3.5%	6	1,6%
Lang	Non (∈ chap.5 produit scalaire et orthogonalité)	296	Page 125	42,2%	5	1,7%
Merlin	Oui	400	Page 61	15,2%	18	4,5%
Etienne	Oui	359	Page 129	35,9%	23 (ex. inclus)	6,4%

Tableau 2.I. Présentation de la section consacrée explicitement à la dualité en algèbre linéaire

Remarquons que les chiffres présentés dans la dernière colonne du Tableau 2.I ne tiennent compte que du nombre de pages de la section (ou du chapitre) consacré explicitement à la dualité. Ils ne tiennent donc pas compte du nombre de pages, présentes dans le manuel, où la dualité est utilisée, par exemple à titre d'illustration d'autres notions, ou à l'intérieur d'une démonstration, ou encore en comparaison avec une autre notion. Pour avoir une idée de l'étendue que revêt le secteur dualité sur l'entièreté du manuel, et non plus seulement dans la section (ou chapitre) qui lui est explicitement consacré(e), nous invitons le lecteur à se référer à la section suivante.

Nous pouvons déjà nous apercevoir de la grande diversité de l'importance accordée au secteur dualité dans les différents ouvrages sélectionnés. Certains auteurs y consacrent un chapitre, d'autres pas. L'apparition de la dualité peut se faire relativement tôt dans l'ouvrage, comme chez Lax ou Halmos, ou venir plus tard. De même, on peut constater qu'il n'y a pas de constante en ce qui concerne l'étalement de la partie de l'ouvrage consacrée à la dualité.

Il faut évidemment relativiser certains des chiffres présentés ci-dessus. On sait par exemple que l'ouvrage de Lax référencé ici s'adresse à des étudiants non novices en algèbre linéaire. Il est donc compréhensible que la dualité apparaisse si tôt dans l'ouvrage. Ce qui est plus surprenant, c'est la place accordée par Halmos à la dualité. Rappelons ici l'importance historique qu'à joué ce livre dans la diffusion de l'algèbre linéaire dans la communauté scientifique et l'enseignement supérieur.

2. Chapitres et sections où les thèmes de la dualité sont cités/utilisés

Le tableau suivant comporte, pour chacun des manuels analysés, deux parties: l'une consacrée aux chapitres, l'autre consacrée aux sections. Chacune de ces deux parties est composée de deux colonnes reprenant dans la première le nombre de chapitres/sections développant ou utilisant la dualité par rapport au nombre total de chapitres/sections repris(e)s dans le manuel; la seconde colonne de chaque partie reprend la part relative (en pourcentages) de ces chapitres/sections par rapport à l'entièreté du manuel.

	Chapitres		***Sections***	
Toint	3/10	30,0%	6/36	16,7%
Halmos	3/4	75,0%	23/93	24,7%
Birkhoff & Mac Lane1	5/9	55,6%	11/88	12,5%
Grifone	3/10	30,0%	5/87	5,7%
Escofier	Première année : 1/10 Tout le livre : 3/22	10,0% 13,6%	Première année : 9/79 Tout le livre : 9/198	11,4% 4,5%
Pham & Dillinger	1/5	20%	3/25	12,0%
Lax	9/18 (1/16 annexes)	50,0% (6,3%)	-	-
Lang	2/12	16,7%	2/56	3,6%
Merlin	5/18	27,8%	10/82	12,2%
Etienne	2/10	20,0%	4/17	23,5%

Tableau 2.II. Importance de la dualité dans l'ensemble d'un manuel

Le tableau ci-dessus nous montre que la dualité n’est généralement pas un secteur isolé en algèbre linéaire bien que les thèmes présentés et l’utilisation qui en est faite varient d’un auteur à l’autre. Remarquons toutefois dans le Tableau 2.II que c’est dans les livres « historiques » (Halmos ; Birkhoff & Mac Lane) que l’on retrouve la dualité dans un nombre relativement important de chapitres. On note que les livres récents font de moins en moins de place à la dualité. A l’université en France, celle-ci n’est plus abordée en première année. Ceci confirme la difficulté de ce sujet, qui peut difficilement rester présent si l’allégement des programmes au lycée nécessite la présentation en première année d’université de contenus qui relevaient jusque là du secondaire.

Annexe 3. Tables des matières et description de l’organisation mathématique globale/régionale dans les manuels analysés au chapitre 3, § 2.2.

Cette annexe se compose de deux parties :

Nous présentons dans un premier temps (§ 1) la table des matières des cinq livres présentés à la section 2.2 du chapitre 3, afin d’avoir une vue d’ensemble de ces manuels sélectionnés pour l’analyse globale, régionale et locale de la dualité en tant que savoir à enseigner. Afin d’avoir une vision d'ensemble de l'endroit d'introduction et/ou d'utilisation des thèmes liés à la dualité dans le domaine de l’algèbre linéaire, nous avons ajouté, à chacune des tables des matières, des notations entre crochets « **[ ]** ». Il s'agit des sujets et thèmes que nous avons définis pour le secteur dualité. Pour éviter toute ambiguïté avec les composantes de la table des matières elle-même, ces notations sont en <u>**caractères gras et soulignées**</u>. Des remarques ont aussi parfois été ajoutées. Elles sont également **en gras** mais ne sont quant à elles pas soulignées.

Dans un second temps (§ 2), nous décrivons plus en détail l’organisation mathématique globale/régionale qui est faite de la dualité dans chacun de ces cinq manuels. Cela permettra au lecteur curieux de mieux comprendre les articulations annoncées dans les tables des matières reprises à la première section de cette annexe.

1. Présentation des tables de matières

1.1. Table des matières du livre d’Halmos (1974) : *Finite-Dimensional Vector Spaces*

21. Quotient spaces [**dual**] [**annulateurs**] **: thèmes présents dans les énoncés d'exercices**
22. Dimension of a quotient space
23. Bilinear forms [**forme bilinéaire**]
24. Tensor products [**dual**] [**forme bilinéaire**]
25. Product bases [**dual**] [**forme bilinéaire**]
26. Permutations
27. Cycles
28. Parity
29. Multilinear forms
30. Alternating forms
31. Alternating forms of maximal degree

Chapitre 2. TRANSFORMATIONS

32. Linear transformations
33. Transformations as vectors [**dual**] **: thème présent dans l'énoncé d'un exercice**
34. Products
35. Polynomials
36. Inverses
37. Matrices
38. Matrices of transformations
39. Invariance
40. Reducibility
41. Projections
42. Combinations of projections
43. Projections and invariance
44. Adjoints [**dual**] [**bidual**] **[application transposée]**
45. Adjoints of projections [**dual**] **[application transposée] [annulateurs] [matrice transposée]**
46. Change of basis [**dual**] **[covariant/contravariant]**
47. Similarity [**dual**] [**transposée**] **: thèmes présents dans des énoncés d'exercices**
48. Quotient transformations
49. Range and null-space [**dual**] [**annulateur**] [**transposée**] [**image**] [**noyau**]
50. Rank and nullity [**transposée**] [**rang**]
51. Transformations of rank one [**base duale**]
52. Tensor products of transformations [**dual**]
53. Determinants
54. Proper values
55. Multiplicity
56. Triangular form [**dual**] [**transposée**] [**annulateur**]
57. Nilpotence
58. Jordan form

Chapitre 3. ORTHOGONALITY

59. Inner products
60. Complex inner products
61. Inner product spaces
62. Orthogonality
63. Completeness
64. Schwarz's inequality
65. Complete orthonormal sets

1.2. Table des matières du livre d'Escofier (2006) : *Toute l'algèbre de la licence*

Remarque : Dans la table des matières du livre d'Escofier, les sections de chaque chapitre sont citées. Pour une question de lisibilité, nous n'avons détaillé ici que les sections des chapitres où intervenaient les thèmes et sujets liés au secteur dualité.

Avant-propos

Première année

Chapitre 1. Equations différentielles linéaires
Chapitre 2. Suites récurrentes linéaires
Chapitre 3. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$
Chapitre 4. Systèmes linéaires
Chapitre 5. Généralités sur les espaces vectoriels
Chapitre 6. Bases et dimension
Chapitre 7. Applications linéaires

- 7.1. *Naissance du concept*
- 7.2. *Applications linéaires*
- 7.3. *Exemples*
- 7.4. *Propriété universelle*
- 7.5. *Noyau d'une application linéaire*
- 7.6. *Image d'une application linéaire*
- 7.7. *Le théorème du rang ou des dimensions*
- 7.8. *Résolution d'une équation linéaire*
- 7.9. *Résolution d'un système linéaire* [**<u>hyperplan</u>**]
- 7.10. *Isomorphismes*
- *Exercices*
- *Solutions*

Chapitre 8. Matrices
Chapitre 9. Sommes directes, produits, quotients

- 9.1. Exemples
- 9.2. *Décomposition en somme directe*
- 9.3. *Sommes directes finies*
- 9.4. *Produit de deux espaces vectoriels*
- 9.5. *Projecteurs*
- 9.6. *Espaces vectoriels quotients*
- *Exercices* [**<u>matrice transposée</u>**]
- *Solutions*

Chapitre 10. Dualité

- 10.1. *Introduction*[**<u>dual</u>**] [**<u>forme linéaire</u>**] [**<u>bidual</u>**]
- 10.2. *Formes linéaires et hyperplans* [**<u>forme linéaire</u>**] [**<u>hyperplan</u>**]
- 10.3. *Base duale* [**<u>base duale</u>**]
- 10.4. *Orthogonal d'un sous-espace* [**<u>orthogonal</u> (et non annulateur)**] [**<u>hyperplan</u>**]
- 10.5. *Transposée d'une application linéaire* [**<u>transposée (application & matrice)</u>**]
- *Exercices*
- *Solutions*

Deuxième année

Troisième année

1.3. Table des matières du livre de Pham&Dillinger (1996) : *Algèbre linéaire*

Remarque : Dans la table des matières du livre de Pham & Dillinger, les sections de chaque chapitre sont citées. Pour une question de lisibilité, nous n'avons détaillé ici que les sections des chapitres où intervenaient les thèmes et sujets liés au secteur dualité.

ii. Dualité [<u>**dual**</u>] [<u>**formes linéaires**</u> **(reprise sous le terme de *fonctions* linéaires de *E* à valeurs dans *IK*)**] [<u>**bidual**</u>] [<u>**base duale**</u> **(reprise sous les termes de système de coordonnées associé à une base)**] [<u>**transposée**</u> **(application et matrice)**] [<u>**annulateur**</u> **(repris sous les termes d'espace co-normal à un sous-espace vectoriel)**]

iii. L'algèbre des endomorphismes et le groupe linéaire

Solutions des exercices

1.4. Table des matières du livre de Merlin (1995) : *Methodix algèbre (250 méthodes, 250 exercices corrigés)*

Remarque : Dans la table des matières du livre de Merlin, les sections de chaque chapitre sont citées. Pour une question de lisibilité, nous n'avons détaillé ici que les sections des chapitres où intervenaient les thèmes et sujets liés au secteur dualité.

Avant-propos

Chapitre 1 : Méthodes d'étude des polynômes

Chapitre 2 : Méthodes de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Chapitre 3 : Méthodes générales d'algèbre linéaire : espaces vectoriels et applications linéaires

Chapitre 4 : Méthodes de dualité

1. Formes linéaires **[formes linéaires] [crochet de dualité] [hyperplan] [noyau]**
2. Orthogonalité **[crochet de dualité] [annulateur (vu comme orthogonal)] [noyau] [bidual]**
3. Base duale **[base duale]**
4. Transposée **[application transposée] [algèbre bilinéaire] [adjointe] [matrice transposée]**

Chapitre 5 : Méthodes de calcul matriciel (1)

Chapitre 6 : Méthodes de calcul matriciel (2)

1. Rang
2. Trace **[formes linéaires]** [**utilise le dual de $\mathcal{M}_n$**]
3. Polynômes de matrices
4. Centres et commutants
5. Espaces stables **[hyperplan] [application transposée]**
6. Résolution d'équations matricielles
7. Traitement algébrique et traitement matriciel d'un exercice

Chapitre 7 : Méthodes de calcul de déterminants

Chapitre 8 : Méthodes de diagonalisation pratique

Chapitre 9 : Méthodes de réduction théorique

0. Ce qu'il est nécessaire et suffisant de savoir…
1. Thème 1 : Polynôme caractéristique
2. Thème 2 : Endomorphisme d'espaces fonctionnels
3. Thème 3 : Espace stables par A
4. Thème 4 : Réduction par « blocs »
5. Thème 5 : Réductions simultanées **[application transposée]**
6. Thème 6 : Endomorphismes de L(E) et applications
7. Thème 7 : Localisation du spectre

8. Thème 8 : Autres réductions classiques
9. Thème 9 : Exercices « n'ayant rien à voir avec la diagonalisation »

Chapitre 10 : "Best of" Vrai ou Faux : réduction des endomorphismes

Chapitre 11 : Méthodes de topologie matricielle

Chapitre 12 : Méthodes d'étude de l'exponentielle matricielle

Chapitre 13 : "Best of" : Méthodes d'études des matrices classiques

Chapitre 14 : Méthodes générales d'algèbre bilinéaire

1. Comment étudier les propriétés des formes
   - A) Problèmes de définitions
   - B) Décomposition de Gauss **[<u>formes linéaires</u>]**
   - C) Orthogonalité, cône isotrope et noyau **[<u>annulateur</u> (vu comme orthogonal)]**
   - D) Bases orthogonales [**<u>base duale</u>**]
2. Produit scalaire et norme
3. Base orthonormale et orthonormalisation de Schmidt

Chapitre 15 : Méthodes de détermination de la signature

Chapitre 16 : Méthodes d'étude des endomorphismes autoadjoints

Chapitre 17 : "Best of" : Endomorphismes classiques des espaces euclidiens et hermitiens

Chapitre 18 : L'essentiel de l'algèbre... en quatre pages [**on y parle de la transposée**]

1.5. Table des matières du livre d'Uhlig (2002) : *Transform Linear Algebra*

2. Présentation de l'organisation mathématique globale/régionale de la dualité

2.1. Le livre d'Halmos

Le livre de Halmos (1974), composé de 200 pages, comporte 4 chapitres. Il ne traite que des espaces vectoriels de dimension finie. Le cas réel (champ réel) et le cas complexe (champ complexe) sont tous deux abordés dans l'ouvrage.

Le **premier chapitre**, intitulé "Spaces" (Espaces), est constitué de 31 sections, parmi lesquelles on trouve en treizième position, et déjà à la page 20, la section intitulée "*Dual spaces*". Halmos aborde donc très vite la dualité : n'ont été présentées que les notions de champ, d'espace vectoriel, de dépendance linéaire, de combinaisons linéaires, de base et dimension, d'isomorphismes et de sous-espaces vectoriels.

Halmos commence la première section où est abordé le secteur dualité par la définition, d'une "linear functional", que nous appelons maintenant forme linéaire. Il définit ensuite l'espace vectoriel dual, qu'il note $\mathcal{V}'$.

Dans la section suivante ("*Brackets*"), Halmos introduit une notation, les crochets [ ], qui lui permettra plus tard de définir un élément du bidual ainsi que la transposée, et également de faire le lien entre la transposée et l'adjointe d'une application. Halmos définit ainsi, pour une forme linéaire y et un vecteur x, la notation $[x,y] = y(x)$. Ces crochets définissent ainsi une "bilinear functional" (forme bilinéaire). Viennent ensuite des exercices, proposés principalement dans le cadre analytique.

Toujours dans ce premier chapitre, la section 15 est intitulée " *Dual bases*". Trois théorèmes y sont présentés avec leur démonstration, et la définition de base duale, notée $\mathcal{X}$ '= $\{y_1,\ldots,y_n\}$ d'une base $\mathcal{X} = \{x_1,\ldots,x_n\}$de $\mathcal{V}$ est donnée : $[x_i,y_j] = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, qui vaut un si $i = j$ et qui vaut zéro si $i \neq j$). Quoi qu'il le démontre via la base duale, Halmos ne mentionne pas explicitement l'existence d'un isomorphisme entre un espace et son dual.

La section suivante est consacrée à la *réflexivité*, c'est-à-dire au fait qu'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ est canoniquement isomorphe à son bidual $(\mathcal{V}')' = \mathcal{V}''$. Les crochets de dualité sont alors utilisés pour décrire un élément du bidual : pour x_0 fixé dans $\mathcal{V}$, $[x_0, .\ ] \in \mathcal{V}''$. Halmos énonce et démontre le théorème concernant la « *natural correspondance* », et explique ces termes. Il explique alors qu'en dimension finie, on peut identifier $\mathcal{V}$ à $\mathcal{V}''$et qu'on peut se permettre de dire qu'un élément z_0 de $\mathcal{V}''$ est le *même* que l'élément x_0 de $\mathcal{V}$où l'on a : $z_0(y) = [x_0,y]$ pour tout y dans $\mathcal{V}$. Il se permet donc l'identification de la base du primal avec la base duale de la base duale : $\mathcal{X}'' = \mathcal{X}$.

La section 17 est intitulée « Annihilators ». La notation $\mathcal{S}^0$ est utilisée pour l'annulateur d'un sous-ensemble (pas nécessairement sous-espace) $\mathcal{S}$ de vecteurs de $\mathcal{V}$. Halmos reprend sous forme de théorème qu'il démontre le fait que $\mathcal{M}^0$ est un sous espace de dimension (n-m) si $\mathcal{M}$ est une sous-espace de dimension m de $\mathcal{V}$, lui-même de dimension n. L'identification faite à la section précédente permet à l'auteur d'énoncé et de démontrer que $(\mathcal{M}^0)^0 = \mathcal{M}$.. Des exercices clôturent la section.

Les deux sections suivantes sont consacrées aux sommes directes d'espaces vectoriels (définis sur le même champ) et à leurs dimensions. Les notations $<x,y> \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, sont adoptées.

La section 20 s'intitule « *Dual of a direct sum* ». L'auteur utilise les résultats des deux sections précédentes pour énoncer et démontrer le théorème selon lequel si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont des sous-espaces de l'espace vectoriels $\mathcal{V}$, et si $\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$, alors $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathcal{N}^0$ et $\mathcal{N}$ à $\mathcal{M}^0$, et $\mathcal{V}' = \mathcal{M}^0 \oplus \mathcal{N}^0$. Des exercices terminent la section.

Les deux sections suivantes sont consacrées aux espaces quotients et à leurs dimensions. La notation $\mathcal{U}/\mathcal{M}$ est utilisée pour désigner l'espace quotient de $\mathcal{U}$ modulo $\mathcal{M}$. Ces deux sections se clôturent par 5 énoncés d'exercices, dont le quatrième implique le dual de $\mathcal{U}/\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^0$ [outil illustration], et le dernier travaille sur $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}'$.

La section 23 s'intitule « Bilinear Forms ». Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux espaces vectoriels construits sur le même champ, Halmos note par $w(x,y)$ la valeur d'une fonction w en un élément $<x,y>$ de $\mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Il introduit les termes « *bilinear form (or bilinear functional)* » pour une fonction w définie sur $\mathcal{W}$ et à valeurs dans les scalaires. La dualité intervient dans cette section en tant qu'outil-illustration, en étant un cas particulier de l'espace $\mathcal{V}$ intervenant dans la définition d'une forme bilinéaire.

Les deux sections suivantes, « Tensor products » et « Product bases » font référence au dual et aux formes bilinéaires. La dualité intervient comme outil-définition pour le produit tensoriel $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ de deux espaces $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de dimension finie définis sur le même champ[5]. Cela permet à l'auteur d'utiliser les théorèmes évoqués dans les sections présentant la dualité et les formes bilinéaires.

Le premier chapitre se termine avec les sections consacrées aux permutations, aux cycles, à la parité, aux formes multilinéaires, aux formes alternées et aux formes alternées de degré maximal. Les *k*-formes y sont mentionnées, mais sans référence explicite à la dualité.

Le **deuxième chapitre** du livre d'Halmos, intitulé "Transformations", reprend 27 sections, numérotées de 32 à 58. L'auteur y définit, à la section 32, les *transformations* linéaires. A la section 37, il définit une "matrice associée sous certaines conditions à une transformation linéaire". A la section 44, intitulée "Adjoints", il écrit : "*the linear transformation A' is called the* adjoint *(or dual) of A* ". Ce *A'* est ce que nous avons appelé f^t, la transformation "transposée de *f* ". C'est dans cette section que l'auteur énonce et démontre les propriétés de la transposée. La section suivante de ce deuxième chapitre est intitulée "Adjoints of projections". Dans ce cas particulier de "*adjoint*" (transposée), interviennent de nouveau les annulateurs, étant donné que "*if E is the projection on M along N, then E' is the projection on N° along M°* " (Halmos, 1974; p.80). C'est à la fin de cette section qu'il définit la matrice associée à la transformation transposée : "*this matrix [A'] is called the transpose of [A]* " (Halmos, 1974; p.81). Remarquons que, si l'auteur utilise le terme *adjoint* ou *dual* pour nommer la transformation transposée, c'est bien le terme *transpose* qu'il utilise pour désigner la matrice associé à la transformation transposée. On se rappelle que, historiquement, la matrice transposée a été définie bien avant que n'apparaisse le concept de transformation transposée (voir chapitre 2).

Dans la section 46 consacrée aux changements de base, Halmos utilise la dualité comme analogie pour l'interprétation du produit matriciel ; ce qui lui permet d'introduire la notion de vecteurs covariants et contravariants.

La section 49 du deuxième chapitre s'intitule "*Range and null-space*", ce qui se traduit en français par *image et noyau*. Les annulateurs interviennent donc encore dans cette section,

[5] Voir chapitre 1, § 2.1.

et le théorème fondamental de l'algèbre linéaire y est énoncé et démontré (Halmos ne donne pas de nom au théorème).

Remarquons que les exercices proposés à la fin des sections sont régulièrement proposés dans le cadre de l'analyse (opérateur différentiel,...), ce qui n'est pas sans rappeler le cadre qui a permis de développer les notions liées au dual.

La section suivante de ce chapitre, intitulée "*Rank and nullity*", fournit la définition du *rang* d'une transformation linéaire. La dualité y est encore présentée sous forme d'objet à travers le théorème affirmant que le rang d'une application et celui de sa transposée sont égaux. Halmos présente dans ce même théorème le fait que, pour une application linéaire, la dimension de son image plus la dimension de son noyau est égale à la dimension de l'espace de départ (appelé maintenant le théorème du rang).

La section 51 intitulée "*Transformation of rank one*" contient un théorème dont la démonstration utilise des bases duales [outil-démonstration].

On se rend donc déjà compte à ce stade qu'Halmos alterne très habilement les passages où il présente la dualité en tant qu'objet avec les passages où la dualité est considérée comme un outil, avec des finalités variées.

Le **<u>chapitre 3</u>** est intitulé « orthogonality ». Après avoir défini le produit scalaire et l'orthogonalité, Halmos annonce que l'on peut maintenant obtenir une correspondance *naturelle* entre $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$: il énonce et démontre théorème de représentation de Riesz (sans toutes fois lui donner ce nom), faisant ainsi le lien entre les formes linéaires et le produit scalaire. Grâce à ce théorème, Halmos définit aussi un produit scalaire sur $\mathcal{V}'$[6], à partir du produit scalaire sur $\mathcal{V}$. Le dual d'un espace euclidien (réel) ou unitaire (complexe) $\mathcal{V}$, muni du produit scalaire ainsi défini est noté $\mathcal{V}^*$. Il y a donc un isomorphisme conjugué naturel entre $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}^*$. Halmos présente ensuite l'analogie entre les crochets de dualité [.,.] et la notation utilisée pour le produit scalaire (.,.). De même, avec l'introduction du produit scalaire, l'annulateur $M°$ (sous-espace de $\mathcal{V}'$ ou $\mathcal{V}^*$) est remplacé par l'orthogonal $M^{\perp}$ (sous-espace de $\mathcal{V}$) ; la base duale d'une base $\mathcal{X} = \{x_1,\ldots,x_n\}$de $\mathcal{V}$ est remplacée par une base $\mathcal{Y} = \{y_1,\ldots,y_n\}$de $\mathcal{V}$ telle que $(x_i,y_j) = \delta_{ij}$. Halmos définit ensuite la transformation linéaire A^* par analogie avec la transformation transposée A' qu'il avait définie dans le chapitre 2. Rappelons qu'Halmos appelait déjà A' la transformation *adjointe* de A (et non pas *transposée*). Il ne donne pas de nom particulier à A^*. Il démontre ensuite que $A=A^{**}$, alors que l'on ne pouvait écrire $A=A''$ qu'en invoquant le théorème de réflexivité.

Le chapitre 4 est dédié à l'analyse, cadre privilégié d'application pour les notions d'algèbre linéaire.

En conclusion de cette analyse, nous pouvons dire qu'Halmos introduit rapidement la dualité dans son ouvrage. Il alterne régulièrement les moments où il présente la dualité comme un objet et les moments où il utilise les thèmes de la dualité déjà introduits, que ce soit pour définir, introduire ou illustrer une nouvelle notion ou pour démontrer une propriété. Sans oublier les analogies qu'il fait à partir de la dualité. Pour Halmos, la dualité est tout aussi naturellement utilisée que le serait une notion élémentaire d'algèbre linéaire, telle une base ou une application linéaire.

---

[6] Soient $y_1', y_2' \in \mathcal{V}'$. Par le théorème de Riesz, il leur correspond les vecteurs y_1 et y_2 dans $\mathcal{V}$. Halmos définit alors le produit scalaire (y_1', y_2') comme étant égal à $\overline{(y_1, y_2)} = (y_2, y_1)$.

2.2. Le livre d'Escofier

Le livre d'Escofier (674 pages) comporte trois parties, pouvant correspondre respectivement aux trois premières années d'université du parcours d'un étudiant en mathématiques en France.

La première partie, correspondant donc à la première année, présente l'algèbre linéaire, ainsi que l'algèbre de base. Elle comporte 10 chapitres dont le dernier est consacré à la dualité.

Après un avant propos dans lequel il explique l'approche historique et généralisatrice de son livre, l'auteur consacre quatre chapitres à la présentation de ce qui pourrait lui servir de cadre par la suite : le premier chapitre est consacré aux *équations différentielles linéaires*, le deuxième aux *suites récurrentes linéaires*, le troisième à *l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$ et le quatrième aux *systèmes linéaires*. Vient ensuite un chapitre intitulé "*Généralités sur les espaces vectoriels*", suivi d'un autre sur les "*bases et dimension*". C'est dans ce chapitre, à la section 6.5 traitant de la "*dimension*", que l'auteur définit un hyperplan d'un espace vectoriel E comme étant un sous-espace de dimension n-1. Le chapitre 7 est consacré aux applications linéaires. C'est à la section 7.9 ("*résolution d'un système linéaire*") de ce chapitre qu'un hyperplan est présenté comme étant le noyau d'une application linéaire $f:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, autrement dit, l'hyperplan est défini par l'équation $a_1x_1 + ... + a_px_p = 0$. L'auteur précise ensuite qu'on peut considérer la résolution d'un système d'équations linéaires comme la détermination de l'intersection de la famille d'hyperplans définis par les équations du système linéaire (p.123).

Vient ensuite le chapitre 8 consacré aux *matrices*. Le lien entre matrice et application linéaire est fait d'emblée à l'entrée de ce chapitre, suivi d'une composante historique et d'exemples. Si on y parle ensuite de matrice de la composée ou de matrice inverse, il n'est cependant pas fait mention de matrice transposée, les bases pour introduire cette notion n'ayant pas encore été posées.

Le chapitre 9 se termine par la remarque suivante :

> **Vers le chapitre 10**
>
> Le chapitre 9 termine ce qu'il semble raisonnable d'enseigner en première année de Licence au sujet de l'algèbre linéaire actuellement. Le chapitre 10 est un peu à part. Il présente des notions sur l'espace vectoriel formé par les hyperplans d'un espace vectoriel, appelé espace dual. Certains et certaines pourront le trouver un peu difficile, un peu abstrait; si sa seule lecture peut-être différée jusqu'au chapitre 16, il semble plus à sa place ici. (Escofier 2006, p.175).

Voici le lecteur prévenu!

Remarquons cependant que c'est à la fin du chapitre 9 et par l'intermédiaire de l'énoncé d'un exercice que l'auteur définit la transposée d'une matrice $M = (a_{ij})$ comme étant la matrice ${}^tM = (a_{ji})$. Il renvoie à la section 5 du chapitre 10 (*dualité*) pour une présentation de ces matrices.

Le chapitre 10, consacré à la "*Dualité*" ne comporte que 13 pages, incluant des énoncés et solutions d'exercices. Après une introduction à caractère historique, l'auteur définit l'espace vectoriel dual de E en dimension finie. Il le note E^*, et définit dans la foulée le bidual, E**.

La section 10.2 s'intitule "*Formes linéaires et hyperplans*". Une proposition reprend les liens entre ces deux notions. La section 10.3 est dédiée à la notion de "*Base duale*". Escofier y donne, sans vraiment le dire, l'expression générale d'une forme linéaire. L'auteur explique aussi à la fin de cette section, que les coordonnées des formes linéaires dans la base duale permettent de travailler avec des formes linéaires en lieu et place des équations.

Dans la section 10.4 ("*Orthogonal d'un sous-espace*"), l'auteur définit l'orthogonalité de formes linéaires et de vecteurs : une forme linéaire f de E^* et un vecteur u de E sont orthogonaux si $f(u) = 0$. Le terme *orthogonal* est expliqué par le fait que les coordonnées de u et f définissent dans $\mathbb{R}^n$ des vecteurs orthogonaux pour le produit scalaire usuel (l'auteur renvoie au chapitre 16 pour ces notions). Le terme *annulateur* n'est pas utilisé, Escofier lui préfère le terme *orthogonal* d'un sous-espace F de E. Il le note $F^{\perp}$. L'auteur explicite ensuite les liens entre forme linéaire de $F^{\perp}$, noyau et hyperplan. Un exemple est donné avec interprétation géométrique ($\mathbb{R}^3$). Escofier définit ensuite l'orthogonal d'un sous-espace G de E^* :

$$G^{\perp} = \{u \in E \mid \forall f \in G : f(u) = 0\}.$$

L'interprétation de cette définition est ensuite également faite en termes d'hyperplans.

Les propriétés qui suivent (dimension et orthogonal d'orthogonal) sont chaque fois énoncées pour les deux types d'orthogonal (d'un sous-espace de E ou de E^*). Evidemment, avec les définitions introduites, on a les propriétés suivantes : si F est un sous-espace de E et G un sous-espace de E^* : $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$ et $\left(G^{\perp}\right)^{\perp} = G$. Les notions sont illustrées par un exemple où $E = \mathbb{R}^3$, et le vocabulaire utilisé est clairement géométrique.

La section 10.5 s'intitule "*Transposée d'une application linéaire*". Après une définition formelle dans le registre générique de l'algèbre linéaire, c'est le registre graphique qui est utilisé pour "*visualiser*" la définition. L'auteur énonce et démontre dans le registre générique algébrique la linéarité de la transposée d'une application linéaire g, notée ${}^t g$. Il utilise par contre ensuite le registre graphique pour expliquer la transposée d'une composition de formes linéaires. La transposée d'une matrice est ensuite définie comme elle l'avait été dans un énoncé d'exercice situé la fin du chapitre 9. La proposition suivant la définition fait alors le lien entre la transposée de l'application et la transposition de la matrice de l'application, le tout présenté dans le registre générique algébrique.

Suivent ensuite des énoncés d'exercices variés, tant au niveau du statut des énoncés que des cadres dans lesquels ils sont formulés.

Après la présentation de la dualité faite au chapitre 10, il faut attendre le chapitre 16 consacré à l'orthogonalité pour que ce secteur soit à nouveau mentionné. On se situe alors, d'après la classification de l'auteur, dans la deuxième année d'enseignement. A la section 16.4, la transposition d'une matrice est utilisée dans l'expression du produit scalaire : si $(e_{1,}...,e_n)$ est une base d'un espace euclidien E, et que $\Phi = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = < e_i, e_j >$, alors $< u, v > = U^t \Phi V = V^t \Phi U$, où u, v sont des vecteurs de E, U et V étant leurs matrices colonnes associées (reprenant leurs coordonnées dans la base $(e_{1,}...,e_n)$.

A la section 16.7 intitulée "*Orthogonalité de sous-espaces*", Escofier définit l'orthogonal d'un sous-espace F d'un espace euclidien E. Il s'agit bien entendu d'un sous-espace de E, et non de son dual. L'articulation entre les formes linéaires et le produit scalaire est faite à partir des formes bilinéaires, ces dernières ont été définies à la section 16.2 :

> Soit E un espace euclidien et soit u un vecteur non nul de E. Notons $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ le produit scalaire. Pour tout u de E, l'application $\varphi_u : v \mapsto \varphi(u, v)$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.C'est donc une

> forme linéaire sur *E*, autrement dit un élément de ce que nous avons appelé au chapitre 10 l'espace dual de *E* et que nous avons noté *E**. (Escofier 2006, p.341)

On y reconnaît ce que nous avons présenté sous le nom de théorème de Riesz dans le chapitre 1, § 2.2.

Le lien avec les hyperplans est ensuite fait en affirmant que l'orthogonal d'un vecteur u non nul de E est l'hyperplan $\ker(\varphi_u)$. L'isomorphisme entre E et E^* est alors précisé : $\varphi_g : E \to E^*$ tel que $u \mapsto \varphi_u$. La matrice associée à φ_g est ensuite précisée.

Remarquons que la dualité est considérée dans cette section comme un objet, et non comme un outil.

A la section 16.12 intitulée "*Endomorphisme adjoint et autoadjoint*", la matrice transposée est citée comme étant la matrice associée à l'endomorphisme adjoint (noté *f**) d'un endomorphisme *f* défini sur un espace euclidien *E*, par rapport à une base orthonormée de *E*. Pour démontrer cette proposition, la matrice transposée est introduite dans la démonstration à partir de la définition de l'adjointe de f ($< f(u), v > = < u, f^*(v) >$) et de l'expression du produit scalaire ($< u, v > = U^t \Phi V = V^t \Phi U$). Aucune référence n'est faite à la dualité.

Dans la section consacrée à la troisième année, le chapitre 22 est consacré aux "*Formes bilinéaires symétriques et quadratiques*". A la première sous-section de ce chapitre intitulée "*Compléments sur le groupe orthogonal d'un espace euclidien*", on trouve des thèmes et sujets de la dualité comme les hyperplans et les orthogonaux de sous-espaces, mais comme on travaille dans un espace euclidien, ce sont les notions définies au chapitre 16 du livre d'Escofier qui sont utilisées, et non les notions de la dualité dont elles sont dérivées. Ainsi, par exemple, l'orthogonal d'un sous-espace est considéré comme un sous-espace de *E* et non comme sous-espace du dual *E**.

Dans la deuxième section de ce chapitre 22, consacrée aux "*Formes bilinéaires et bilinéaires symétriques*", Escofier se sert de la dualité (espace vectoriel dual, forme linéaire et base duale) comme outil-analogie pour les formes bilinéaires symétriques : à toute forme bilinéaire symétrique φ sur un *K*-espace vectoriel *E* de dimension finie correspond (par un isomorphisme) une application linéaire ψ : $E \to E^*$ telle que $\forall u \in E$, $\psi(u) : v \mapsto \varphi(u, v)$. Il continue également de présenter dans cette section la dualité sous forme d'objet : si *B* est une base de *E*, que *B** est la base duale de *B*, et que *A* est la matrice dans la base *B* de la forme bilinéaire symétrique φ, alors *A* est également la matrice représentant l'application ψ par rapport aux bases *B* et *B** (c'est-à-dire $A = [\psi]_B^{B^*}$). Ensuite, à la septième section de ce chapitre, consacrée à l'"*Orthogonalité*", la notion d'orthogonalité (déjà définie entre des vecteurs et des formes linéaires dans le chapitre sur la dualité, et entre vecteurs à travers un produit scalaire) est généralisée au cas des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques. On pourrait qualifier d'outil-analogie l'utilisation qui est faite ici de la dualité : elle permet, à travers les formes bilinéaires symétriques, de faire le lien entre l'orthogonal d'un sous-espace *F* (d'un espace vectoriel *E*) défini dans le chapitre consacré à la dualité (en fait $(\text{sous-espace de } E^*)^{\perp} \subseteq E$), et celui défini dans le chapitre consacré à l'orthogonalité ($F^{\perp} \subseteq E$). En effet, à toute forme bilinéaire symétrique φ, on peut associer une application linéaire $\psi : E \to E^*$, définie par $(\psi(u))(v) = \varphi(u, v)$. Ainsi, l'orthogonal d'un sous espace *F* de *E*, noté $F^{\perp}$ peut être défini des deux façons suivantes :

- $F^{\perp} = \{v \in E \mid \forall u \in F : \varphi(v,u) = 0\}$ ou, comme φ est symétrique :
- $F^{\perp} = \{v \in E \mid \forall u \in F : (\psi(u))(v) = 0\} \overset{not.}{=} (\psi(F))^{\perp}$. Comme $\psi(F) \subseteq E^*$, on reconnaît donc bien dans l'expression de $F^{\perp}$ donnée ici la définition de l'orthogonal d'un sous-espace du dual *E** qui, avec les définitions données par Escofier au chapitre 10 de son ouvrage, donne bien un sous-espace de E : $F^{\perp} \subseteq E$.

Escofier n'en parle pas, mais remarquons qu'on aurait pu écrire :

$$\begin{aligned} F^{\perp} &= \{v \in E \mid \forall u \in F : \varphi(v,u) = 0\} \\ &= \{v \in E \mid \forall u \in F : (\psi(v))(u) = 0\} \\ &= \{\psi(v) \in E^* \mid \forall u \in F : (\psi(v))(u) = 0\}, \end{aligned}$$

ce qui signifie alors que $F^{\perp} \subseteq E^*$. Les définitions adoptées par Escofier dans le chapitre 10 de son ouvrage pour l'orthogonal d'un sous-espace *F* de *E* ou d'un sous-espace *G* de *E** font en sorte que $(F^{\perp})^{\perp} = F$, ce qui permet une certaine liberté quant à l'interprétation à donner à $F^{\perp}$ comme nous l'avons vu ci-avant.

A titre d'information, voici la manière dont Escofier présente les choses dans son ouvrage :

> L'orthogonal d'un sous-espace *F* de *E* est l'ensemble des $v \in E$ tels que, pour tout $u \in F$, $\psi(u)(v) = 0$, autrement dit l'orthogonal de *F* au sens de l'orthogonalité défini par φ dans *E* est l'orthogonal de $\psi(F)$ au sens de 10.4 [il fait référence au chapitre 10, section 4 de son livre] , ce qu'on peut écrire $F^{\perp} = (\psi(F))^{\perp}$; ces deux sous-espaces sont inclus dans *E*, mais la notation mélange deux relations d'orthogonalités, la première étant celle définie par φ dans *E*, la seconde étant celle définie par la dualité entre vecteurs de *E* et formes linéaires de E^*; notons que certains auteurs choisissent deux symboles différents et notent $F^{\perp}$ et F^{o} les sous-espaces orthogonaux à *F* suivant qu'il s'agit de l'une ou l'autre des relations d'orthogonalité. L'utilisation d'un même signe n'est pas gênante, pourvu qu'on sache de quoi on parle, mais nous essaierons d'éviter ces ambiguïtés. (Escofier 2006, p.622).

Enfin, Escofier termine la septième section du chapitre 22, en présentant une proposition où le dual intervient comme un objet :

> Une forme bilinéaire symétrique φ est non dégénérée si et seulement si l'application linéaire $\psi : E \to E^*$ est injective. En dimension finie, cette propriété équivaut à dire que ψ est bijective ou que la matrice de φ est inversible. (Escofier 2006, p.622).

Dans la section 22.8 du chapitre 22 intitulée "*Espaces quadratiques réguliers*", le dual et l'orthogonal d'un sous-espace sont encore présents à travers l'application $\psi : E \to E^*$ associée à une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to E$.

En conclusion, nous pouvons dire que dans l'ouvrage d'Escofier, la dualité est principalement présentée sous un aspect géométrique. Pour preuve, on prendra par exemple la définition et la notation de l'orthogonal (annulateur) d'un sous-espace d'un espace vectoriel : $F^{\perp}$, qui est ici défini à la fois pour un sous-espace de *E* et pour un sous-espace de *E**. La dualité est présente dans l'ensemble de l'ouvrage, à la fois sous le statut d'objet, et sous le statut d'outil. Rappelons que le point de vue géométrique est très clairement privilégié !

2.3. Le livre de Pham & Dillinger

Ce livre (347 pages) comporte un prologue, quatre chapitres, un épilogue et trois annexes. De manière générale, les auteurs relèguent dans les annexes les parties qu'ils jugent trop techniques, comme la définition formelle des structures algébriques par exemple. Ainsi, c'est dans la troisième annexe que se trouvera présentée l'approche formelle de la dualité.

Dans le prologue, les auteurs présentent déjà l'activité mathématique du point de vue du calcul, et du point de vue de la géométrie, en considérant des systèmes d'équations linéaires. Ce double point de vue est une préoccupation des auteurs tout au long de leur ouvrage, comme ils l'annoncent dans l'*Avertissement au lecteur enseignant* : « *Notre principal souci, que résume le slogan* dualité entre géométrie et calcul[7] *est d'amener peu à peu les étudiants à maîtriser les allers-retours entre la pensée géométrique et le monde des calculs. L'algèbre linéaire présente un magnifique formalisme unificateur de ces deux façons de penser.* »

Le premier chapitre, consacré à l'étude formelle des systèmes linéaires, présente des manipulations formelles sur les systèmes d'équations linéaires. Les notions d'indépendance linéaire et de rang[8] y sont définies pour les (systèmes d') équations linéaires. La $i^{ème}$ équation linéaire d'un système est appelée e_i, ce qui permet d'additionner deux équations entre elles, et d'un multiplier une par un scalaire. Le terme d'espace vectoriel n'est cependant pas encore évoqué.

Dans la dernière section du premier chapitre, intitulée "*Formes linéaires*", les auteurs ne définissent pas formellement la notion, mais la présentent comme étant une relation du type $a_1X_1+...+a_nX_n$ où les a_i désignent des constantes numériques (les "coefficients de la combinaison linéaire"), et où les lettres X_i sont à remplacer, selon le contexte, par les diverses lettres désignant les objets à combiner déjà considérés (équations, seconds membres,…). Après des explications écrites en langage courant (mais où aucune définition n'a été donnée), les auteurs écrivent : "*nous savons donc ce qu'est une forme linéaire à n indéterminées* $X_1, ..., X_2$, *à coefficients dans le corps* $\mathbb{K}$" (Pham & Dillinger 1996, p.75). La notion de fonction n'est pas clairement évoquée. Il semble d'ailleurs que pour Pham & Dillinger, la notion de "forme linéaire à *n* indéterminées" corresponde à l'application de la fonction linéaire de *E* dans *K* en un élément quelconque de *E*. Les termes de Pham & Dillinger ne correspondraient donc pas tout à fait à ce que nous avons appelé formes linéaires (voir chapitre 1, § 2.2). Ces dernières correspondraient à ce que les auteurs vont appeler plus tard des fonctions linéaires (voir ci-après).

Après avoir défini les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire (décrites comme manipulant les coefficients des X_i), Pham & Dillinger disent qu'ils peuvent traduire dans le langage des formes linéaires le travail formel présenté jusqu'à présent sur les systèmes linéaires. Ils parlent alors de rang d'un système de formes linéaires comme étant le nombre maximal de formes linéaires indépendantes qu'on peut extraire de ce système.

[7] C'est le titre du chapitre 3 du livre de Pham & Dillinger.

[8] On appelle *rang* d'un système linéaire le nombre maximal de premiers membres linéairement indépendants de ce système. (Pham&Dillinger 1996, p.63)

Les auteurs définissent aussi une *relation entre p formes linéaires* par une forme linéaire à *p* indéterminées $l_1, ..., l_p$ qui, quand on substitue aux lettres l_i les formes linéaires que ces lettres désignent, donne la forme linéaire nulle : $c_1 l_1 + c_2 l_2 + ... + c_p l_p = 0$.

A partir de cette notion de relation entre *p* formes linéaires, les auteurs vont considérer ce que Frobenius (voir chapitre 2, § 2.5) appelait le système adjoint d'un système linéaire, bien que Pham & Dillinger n'utilisent pas ces termes. Ils notent (*S*) le système de formes linéaires $l_1, ..., l_p$, et ($^t S$) ce que Frobenius appelait le système adjoint. Pham & Dillinger n'expliquent cependant pas la motivation du choix des notations. Voici le raisonnement suivi par les auteurs :

Ils écrivent le système de formes linéaires sous la forme :

$$(S)\begin{cases} l_1 & : \quad a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n \\ l_2 & : \quad a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n \\ \cdots & \\ l_p & : \quad a_{p1}X_1 + a_{p2}X_2 + ... + a_{pn}X_n \end{cases}$$

En vue d'obtenir des informations sur le rang du système ($l_1, ..., l_p$), ils cherchent la *relation* la plus générale entre les $l_1, ..., l_p$ sous la forme

$$(\rho) \qquad c_1 l_1 + c_2 l_2 + ... + c_p l_p = 0 .$$

Ils affirment que dire que la relation ρ est vraie revient à dire que ses coefficients $c_1, c_2, ..., c_p$ sont solutions du système linéaire homogène ($^t S$) :

$$({}^t S)\begin{cases} c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + ... + c_p a_{p1} & = & 0 \\ c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + ... + c_p a_{p2} & = & 0 \\ \cdots & & \\ c_1 a_{1n} + c_2 a_{2n} + ... + c_p a_{pn} & = & 0 \end{cases}$$

Les auteurs montrent ensuite que le rang de ce système ($^t S$), noté *r*, est le même que le rang du système (*S*) , en utilisant la notion d'un *système complet de relations*.

Ainsi, à la fin du premier chapitre de cet ouvrage, Pham & Dillinger ont déjà présenté de nombreuses notions liées à la dualité, mais toujours en relation très étroite avec les systèmes d'équations linéaires. C'est une approche que nous avions qualifiée de naturelle dans le chapitre 2, § 4.6 de notre travail. Remarquons que naturalité ne rime pas nécessairement avec simplicité : les objets manipulés par Pham & Dillinger ne sont pas des plus simples : des formes linéaires, des relations de formes linéaires, des systèmes de relations de formes linéaires !

Le **chapitre 2**, intitulé "Espaces vectoriels et géométrie", continue de voir exposées principalement des idées, les côtés plus formels étant relégués dans les annexes de l'ouvrage. Bien sûr, des définitions et théorèmes sont présents, mais l'accent est mis sur une grande variété d'exemples. La géométrie reste le point de repère, bien que les objets manipulés ne soient pas tous de nature géométrique. C'est dans ce chapitre qu'un sous-espace vectoriel de *E* (espace vectoriel de dimension *n*) de codimension 1 est appelé hyperplan. Le lien est fait entre les espaces vectoriels et la géométrie affine (une section y est consacrée). Sont également présentées dans ce chapitre les fonctions linéaires (toujours considérées comme à valeurs dans $I\!K$) et les fonctions affines, ainsi que les applications linéaires. Les auteurs attachent de l'importance à l'interprétation graphique. C'est ainsi qu'ils précisent qu'au lieu d'écrire $F \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} G$, ils écriront $G \xleftarrow{g} E \xleftarrow{f} F$ de manière à avoir le même ordre que dans l'expression $g \circ f$.

La <u>première section</u> du **<u>chapitre 3</u>** "Dualité entre géométrie et calculs" s'intitule "Systèmes de coordonnées et dualité". Comme cela a été fait dans le chapitre précédent, le cas vectoriel et le cas affine sont tous deux présentés tout au long de ce chapitre également.

On y considère un espace vectoriel *E* de dimension *n*. La notion de système de coordonnées linéaires sur un espace vectoriel *E* associé à une base $(e_i)_{i=1}^n$ est ce que la plupart des auteurs appellent la base duale de $(e_i)_{i=1}^n$, mais Pham & Dillinger n'utilisent pas ces termes. Bien qu'ils disent qu'il s'agisse de fonctions, ils les notent x_i (que l'on pourrait confondre avec un vecteur de l'espace vectoriel *E* !), et n'y associent pas de symbole graphique (par exemple le symbole "flèche" : $\rightarrow$) ni d'expression analytique (comme par exemple $x_i : E \rightarrow K$). A l'approche formelle, Pham & Dillinger préfèrent l'intuition et présentent la notion de base duale à travers une finalité outil-résolution. Les systèmes de coordonnées sont aussi illustrés au moyen de dessins géométriques en dimension 2.

Pham & Dillinger enchaînent avec l'expression d'une fonction linéaire *l* sur *E* (présentée au chapitre précédent) à travers un système de coordonnées linéaires $(x_1, ..., x_n)$ sur l'espace vectoriel *E* : $l = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$, avec $a_i \in K$. Ce qui leur permet de faire le lien avec les formes linéaires à n indéterminées $x_1, ..., x_n$ présentées dans le premier chapitre. Les auteurs précisent que "*bien entendu, quand on voudra interpréter géométriquement les résultats obtenus il faudra se souvenir que les lettres* $x_1, ..., x_n$ *désignent les fonctions coordonnées considérées.*" (Pham & Dillinger 1996, p.130).

Pham & Dillinger justifient l'intérêt des systèmes de coordonnées en disant qu'ils permettent de résoudre par le calcul des problèmes de géométrie, à condition de trouver un système de coordonnées adapté au problème à traiter, c'est-à-dire permettant d'exprimer plus simplement les observations. Ils énoncent et démontrent le fait que, pour tout sous-espace *F* de codimension *p* d'un espace vectoriel (/affine) *E* de dimension *n*, il existe un système de coordonnées linéaires (/affines) $(x_1, ..., x_n)$ tel que *F* soit donné par le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \quad ... \\ x_p = 0 \end{cases}.$$

Seul le cas vectoriel va maintenant être présenté. Le cas affine fera l'objet d'une sous-section suivante. En disant que l'addition de deux fonctions linéaires est interne et que la multiplication d'une fonction linéaire par un scalaire est encore une fonction linéaire, Pham & Dillinger affirment que l'ensemble des formes linéaires sur *E* est un espace vectoriel. Ils l'appellent espace dual de *E* et le note *E**. Les *n* fonctions coordonnées $x_1, ..., x_n$ associées à une base $(e_1, ..., e_n)$ d'un espace vectoriel *E* forment donc une base de *E** ; elles sont dites duales l'une de l'autre (il cite la relation de dualité qui les lie). L'espace dual *E** est donc aussi de dimension *n*. Un exercice en dimension 2 est proposé afin d'illustrer géométriquement la dualité dans le plan.

Les auteurs font remarquer que si deux *n*-uplets $(e_1, ..., e_n)$ et $(x_1, ..., x_n)$, respectivement de *E* et *E** vérifient la relation de dualité $x_i(e_j) = \delta_{ij}$, on peut affirmer que ces *n*-uplets constituent des bases de leurs espaces respectifs.

Dans l’énoncé d’un lemme, Pham & Dillinger disent qu’un hyperplan vectoriel F est défini par l’annulation d’une fonction linéaire l non identiquement nulle. Un vocabulaire géométrique est utilisé en énonçant et démontrant la proposition suivante : le *lieu des zéros* dans E d’un système de p fonctions linéaires $l_1, ..., l_p$, linéairement indépendantes, est un sous-espace vectoriel F de codimension p. Ils complètent par la proposition suivante : sous les hypothèses de la proposition précédente, une fonction linéaire l sur E s’annule en restriction à F si et seulement si elle est combinaison linéaire de $l_1, ..., l_p$.

Un résultat plus général est alors présenté : le lieu des zéros d’un système de fonctions linéaires $(l_1, ..., l_p)$ est un sous-espace vectoriel dont la codimension est égale au *rang* de ce système, c’est-à-dire au nombre maximum de fonctions linéairement indépendantes qu’on peut en extraire. L’identification est alors faite entre le rang cité dans la proposition précédente et le rang de l’application linéaire $l: \begin{array}{ccc} E & \to & K^n \\ u & \mapsto & (x_1(u), \ ... \ , \ x_n(u)) \end{array}$.

Avant de présenter les derniers résultats pour le cas affine, Pham & Dillinger énoncent et démontrent qu’il est toujours possible d’extraire un système de coordonnées sur un sous-espace F ($F \subseteq E$) d’un système de coordonnées de l’espace vectoriel E.

La <u>deuxième section</u> du chapitre 3 a pour titre "Systèmes linéaires et géométrie". Les auteurs y présentent une interprétation géométrique des solutions d’un système linéaire à n inconnues $x_1,...,x_n$. Pour ce faire, ils interprètent les lettres $x_1,...,x_n$ dans le système linéaire comme représentant un système de coordonnées sur un espace vectoriel E de dimension n. Le membre de gauche d’une équation $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ de ce système est la décomposition dans le système de coordonnées d’une fonction linéaire sur E. L’équation considérée représente donc un hyperplan affine de E. Ainsi, l’ensemble des solutions du système d’équations linéaires peut s’interpréter géométriquement comme l’intersection des hyperplans affines définis par chacune des équations du système. La dualité est donc présentée comme un outil-résolution.

Le cas des systèmes homogènes est d’abord interprété à travers les hyperplans vectoriels (espaces vectoriels) ; le cas des systèmes non homogène sera considéré au moyen d’intersections d’hyperplans affines. Dans les deux cas, l’ensemble des solutions du système linéaire s’interprète comme un sous-espace dont la dimension est la codimension du rang du système linéaire. Des exemples sont donnés dans $\mathbb{R}^3$, représentés par des dessins.

Une sous-section intitulée "Calculs dans un sous-espace vectoriel" explicite le lien entre les formes linéaires à n indéterminées : $l = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$, avec $a_i \in K$, et les fonctions linéaires : toute fonction linéaire sur l’ensemble F de solutions d’un système linéaire homogène est la restriction d’une fonction linéaire sur E qui peut être identifiée à une forme linéaire à n indéterminées, mais cette forme linéaire n’est pas unique. Les auteurs précisent que, jusqu’à la fin du paragraphe, ils utiliseront l’expression « forme linéaire » au lieu de fonction linéaire sur E (ce qui correspond à la terminologie que nous avons proposée dans le chapitre 1 de notre travail, et qui est partagée dans la plupart des manuels consultés). Ils définissent alors la notion de deux formes linéaires l et $l’$ *congruentes modulo* un système linéaire homogène S_0 (qu’ils notent $l \overset{\text{mod}.S_0}{=} l'$) par le fait que $l - l' = 0$ est linéairement impliquée par S_0[9]. En conséquence, la donnée d’une fonction linéaire sur F équivaut à la

[9] Quatre pages avant de présenter la notion de congruence modulo S_0, Pham & Dillinger énonçaient et démontraient la proposition suivante (p.144) : *Une forme linéaire l est linéairement impliquée par S_0 (c’est-à-*

donnée d'une forme linéaire à *n* indéterminées à congruence modulo S_0 près. Bien entendu, la relation de congruence modulo S_0 près est une relation d'équivalence et est compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire définissant l'espace vectoriel des formes linéaires.

La sous-section suivante présente les résultats analogues pour un sous-espace affine.

La <u>troisième section</u> du chapitre 3 est consacrée au "Calcul matriciel", et reprend un "*point de vue purement formel*", sans "*interprétation géométrique*" (p.151). Le lien entre les systèmes d'équations linéaires et les matrices est fait explicitement : si on note

(1) $\begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n \\ \vdots & \quad \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\ y_p &= a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + & \dots & + a_{pn}x_n \end{cases}$, on appelle $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$ la matrice de la relation fonctionnelle linéaire (1).

Il avait été précisé que $x_1, \dots, x_n$ sont *n* variables scalaires, et que les $y_1, \dots, y_p$ sont *p* variables scalaires qui sont *fonction linéaires* de $x_1, \dots, x_n$, c'est-à-dire données en fonction de ($x_1, \dots, x_n$) par un système de la forme (1). Vient ensuite une présentation des règles de calcul matriciel. C'est dans cette section qu'est définie la matrice transposée d'une matrice, ainsi que la formule ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$ où il faut faire "*attention*" à "*l'ordre inverse*" (p.156).

Après avoir parlé de la matrice inverse, les auteurs reviennent sue l'interprétation en termes de relation fonctionnelle (1), où $n = p$. La matrice inverse est présentée comme un changement de variables. Le rang d'une matrice est défini comme étant le nombre maximum de lignes linéairement indépendantes de cette matrice bien que les auteurs précisent que "*beaucoup d'auteurs définissent le rang comme le nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes*" (p. 162). Viennent ensuite les notions de matrices réduites à la forme échelonnée, toujours sans référence aucune à des systèmes linéaires.

La <u>quatrième section</u> du chapitre 3 s'intitule "Calcul matriciel et géométrie". C'est dans cette section qu'est fait le lien entre les matrices et les applications linéaires. Les auteurs précisent qu'on peut faire ce lien selon deux versions : soit considérer une application linéaire de K^n dans K^p (où *K* est le corps des scalaires), soit considérer une application linéaire *f* d'un espace vectoriel *E*, muni d'un système de coordonnées ($x_1, \dots, x_n$), dans un espace vectoriel *F*, muni d'un système de coordonnées ($y_1, \dots, y_p$). Le lien entre ces deux considérations est expliqué sous forme de compositions de fonctions (sous forme analytique et graphique) :

$$\begin{array}{ccc} F & \overset{f}{\leftarrow} & E \\ \downarrow y & & \downarrow x \\ K^p & \overset{A}{\leftarrow} & K^n \end{array}$$

où la matrice *A* a été définie à la section 3 du chapitre 3 de Pham & Dillinger (en lien direct avec la relation fonctionnelle (1)), et où *x* (respectivement *y*) est l'isomorphisme entre l'espace vectoriel *E* de dimension *n* (resp. *F* de dimension *p*) et K^n (resp. K^p).

Dans la deuxième version présentant le lien entre les matrices et les applications linéaires, Pham & Dillinger précisent que si l'on change les systèmes de coordonnées, on

dire est combinaison linéaire des formes linéaires constituant S_0) si et seulement si *l'hyperplan vectoriel de E d'équation $l = 0$ contient le sous-espace vectoriel Sol(S_0).*

change les éléments de la matrice de l'application *f*. C'est pourquoi ils adopteront la notation $\mathrm{Mat}_y(f)_x$.

Les auteurs expliquent ensuite que les lignes de la matrice A s'interprètent en termes de fonctions coordonnées, et que les colonnes de la matrice A s'interprètent en termes de vecteurs de base, et tout cela de façon naturelle :

- Pour les lignes : se donner $f : E \to F$ revient à se donner $y \circ f : E \to K^p$, puisque *y* est un isomorphisme. Dans le système de coordonnées ($x_1, ..., x_n$), les *p* fonctions linéaires $y_1 \circ f, ..., y_p \circ f$ se décomposent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} y_1 \circ f & = & a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ ... & = & ... \\ y_p \circ f & = & a_{p1}x_1 + ... + a_{pn}x_n \end{cases}$$

  C'est-à-dire : "*la* $i^{ème}$ *ligne de la matrice A est formée par les coefficients du développement de* $y_i \circ f$ *comme combinaison linéaire de* $x_1, ..., x_n$." (p. 170).
- Pour les colonnes : Pham & Dillinger considèrent la base duale[10] ($e_1, ..., e_p$) de ($x_1, ..., x_n$), et la base duale ($\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p$) de ($y_1, ..., y_p$) ; ils disent ensuite que : " *la* $j^{ème}$ *colonne de A est formée par les coordonnées du vecteur* $f(e_j)$ *dans la base* ($\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p$) *de F.* " (p.171).

Ainsi, les opérations matricielles présentées dans la section 3 du chapitre 3 du livre de Pham & Dillinger sont-elles interprétées maintenant en termes d'applications. Ce lien est chaque fois explicité sous forme de graphique dans le même genre que celui déjà évoqué plus haut :

$$\begin{array}{ccc} F & \xleftarrow{f} & E \\ \downarrow y & & \downarrow x \\ K^p & \xleftarrow{A} & K^n \end{array}$$

Ainsi, les changements de bases sont expliqués en termes de changement de systèmes de coordonnées.

Pour terminer le chapitre 3, Pham & Dillinger donnent une "*traduction géométrique*" du théorème de réduction des matrices qu'ils avaient donné à la section précédente, en termes d'application linéaire de rang *r*, d'espaces vectoriels, et de systèmes de coordonnées. Ils en présentent deux démonstrations, dont la deuxième utilise la dualité (système de coordonnées, espace dual).

La dualité est encore présente dans l'introduction du **chapitre 4** consacré aux "*Endomorphismes d'un espace vectoriel*" par l'intermédiaire des systèmes de coordonnées : une première fois en tant qu'outil-illustration (p.183), et une deuxième fois en tant qu'objet (p.185) pour signaler que les matrices d'un même endomorphisme dans divers systèmes de coordonnées sont toutes semblables.

Enfin, l'approche formelle de la dualité est présentée dans l'annexe C du livre de Pham & Dillinger, intitulée "*Structures algébriques*". Cinq pages y sont consacrées. Le bidual y est introduit en utilisant implicitement le théorème de réflexivité (qui est par ailleurs énoncé et démontré par après), par analogie avec le dual : un élément *l* de *E** est une fonction qui

[10] Rappelons nous que pour Pham & Dillinger, une base de *E* et une base de *E** liées par la relation de dualité sont dites duales l'une de l'autre. Une base duale n'est donc pas nécessairement dans le dual.

associe à un vecteur (variable) v de E un scalaire $l(v)$ dépendant linéairement de v. En considérant v comme fixé et l comme variable, on *vérifie facilement* que ce scalaire dépend linéairement de l.

Pham & Dillinger en concluent donc que l'application qui va de E^* dans K (le corps des scalaires) et qui à l associe $l(v)$, est un élément du « bidual » (espace dual du dual), qui sera noté $\tilde{v}$: $\tilde{v}(l) = l(v)$.

La transposée d'une application linéaire est ensuite définie : soit $f : E \to F$, une application linéaire. $\forall l \in F^*$, $l \circ f \in E^*$. La correspondance $l \mapsto l \circ f$ est appelée l'application transposée de f. Pham & Dillinger la représentent par $E^* \xleftarrow{{}^t f} F^*$. Ils citent ensuite une propriété disant que si f est surjective, sa transposée ${}^t f$ est injective. Comme exemple (éclairant ?), ils donnent ensuite $f = \left(f_1, ..., f_p\right) : E \to K^p$, un k-uplet de fonctions linéaires à valeurs dans K. Ils définissent alors ${}^t f : K^p \to E^*$ telle que $\left(\lambda_1, ..., \lambda_p\right) \mapsto \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p$.

Les coordonnées de la transposée d'une application linéaire $f : E \to F$ peuvent être données par l'intermédiaire des systèmes de coordonnées, si E et F sont de dimension finie : Si $(x_1, ..., x_n)$ est un système de coordonnées de E et que $(y_1, ..., y_p)$ est un système de coordonnées de F, alors, l'application transposée ${}^t f : F^* \to E^*$ est celle qui, à la fonction $l = \lambda_1 y_1 + ... + \lambda_p y_p$ associe la fonction $l \circ f = \lambda_1 (y_1 \circ f) + ... + \lambda_p (y_p \circ f) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i a_{ij} x_j$ où $\left(a_{ij}\right)$ est la matrice de l'application linéaire f.

Pour affirmer que la matrice de l'application ${}^t f$ (dans les « bonnes bases ») est la transposée de la matrice de f, Pham & Dillinger se servent du fait que les coordonnées du vecteur ${}^t f(l)$ dans la base $(x_1, ..., x_n)$ sont $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{i1}$, …, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{in}$; et que $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont les coordonnées du vecteur $l \in F^*$ dans la base $(y_1, ..., y_p)$.

Pham & Dillinger précisent ensuite que si les espaces E et F sont de dimension finie, la transposée d'une application linéaire injective est surjective.

Ils reprennent après un vocabulaire géométrique pour dire que dans le cas d'espaces vectoriels de dimension finie, "*la relation de dualité est symétrique* : si *E' est dual de E, alors E est dual de E'* " (p. 333), et qu'il en est de même pour la relation de transposition : "si l'application linéaire f 'est transposée de l'application linéaire f, alors f est transposée de f ' " (p.334). On remarquera que les notations utilisées ici ne correspondent plus aux notations introduites peu de temps auparavant : E^* pour le dual de E, et ${}^t f$ pour l'application transposée de f.

Est ensuite introduite la notion d'*espace conormal* à un sous-espace vectoriel F de E : c'est l'ensemble des fonctions linéaires l sur E telles que $l \mid F = 0$. Il s'agit de ce que nous avons appelé l'annulateur de F. Pham & Dillinger le notent E^*_F. Ils énoncent et prouvent le fait qu'on a un isomorphisme canonique $F^*_E = (E / F)^*$, et que si E est de dimension finie, on a également un isomorphisme canonique $F^* = E^* / E^*_F$.

En conclusion, on peut dire que Pham & Dillinger, en reléguant l'aspect (très) formel des choses dans les annexes, se permettent de garder un point de vue intuitif et géométrique dans le développement des idées tout au long des chapitres de leur livre. Le cadre des systèmes d'équations linéaires est très privilégié pour l'introduction des notions de dualité, par exemple pour les formes linéaires à *n* indéterminées. L'interprétation géométrique est omniprésente, et l'interprétation en termes d'hyperplans est souvent présentée. On pourrait peut-être qualifier de plus difficiles les sujets et thèmes de la dualité que Pham & Dillinger ont choisi de ne présenter que dans l'annexe : le bidual (et le théorème de réflexivité) et l'application transposée.

2.4. Le livre de Merlin

Le livre de Merlin, 400 pages, comporte 18 chapitres, dont les 16 premiers exposent des méthodes concernant un secteur ou un sujet d'algèbre. L'avant dernier chapitre reprend un « best-of » concernant des endomorphismes, et le dernier chapitre reprend une synthèse, en quatre pages, de ce que l'auteur appelle l'essentiel de l'algèbre.

Après avoir exposé des méthodes concernant l'étude des polynômes et la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples (chapitres 1 et 2), l'auteur présente un chapitre portant sur des *méthodes générales d'algèbre linéaire (espaces vectoriels et applications linéaires)*. C'est juste après que la dualité est abordée : un **chapitre** entier (le **quatrième**) lui est consacré. Il comporte quatre sections. Seuls les espaces vectoriels de dimension *finie* y sont étudiés.

Etant donnée la spécificité de l'ouvrage qui consiste en un exposé de méthodes, nous énumérerons les titres des méthodes proposées où intervient la dualité.

La première section s'intéresse aux *formes linéaires*. Trois méthodes y sont expliquées :

Méthode 1 : Comment montrer que φ est une forme linéaire

La notation du crochet de dualité est introduite : $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$[11], le dual d'un espace vectoriel *E* est noté *E**, et l'attention du lecteur est portée sur la différence existante entre une forme linéaire et une forme *n*-linéaire (comme le déterminant d'une matrice d'ordre n). La trace d'une matrice est donnée comme exemple de forme linéaire.

Méthode 2 : Utiliser le catalogue des formes linéaires.

Deux cas sont présentés : celui d'un espace euclidien et celui de l'espace des matrices carrées d'ordre n : $M_n(\mathbb{R})$. Dans le cas d'un espace euclidien, c'est le théorème de Riesz qui est cité (Merlin n'en donne pas le nom) :

$$\forall \varphi \in E^*, \exists! a \in E \quad \text{tq:} \quad \forall x \in E \quad \varphi(x) = \langle a, x \rangle .$$

Merlin en donne une interprétation géométrique (p.62) : "*En gros, il suffit de bien choisir un vecteur directeur de l'orthogonal du noyau de la forme en question, qui est une droite (ou l'espace nul).*"

[11] Remarquons qu'il s'agit de la même notation $\langle .,. \rangle$ que celle qui est utilisée dans cet ouvrage pour le produit scalaire. Il précisera explicitement par la suite (p.64) que les arguments du crochet de dualité sont de nature duale : une forme linéaire et un vecteur, alors que les arguments du produit scalaire sont de même nature.

En ce qui concerne $M_n(\mathbb{R})$, Merlin annonce que toute forme linéaire sur cet espace s'écrit à l'aide de la trace : $\forall \varphi \in \mathcal{M}_n^*, \exists! A \in \mathcal{M}_n$ tq: $\forall M \in \mathcal{M}_n \quad \varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$. Un exemple est donné.

Méthode 3 : Comment utiliser la définition d'une forme linéaire

Merlin présente les propriétés qui découlent de la définition d'une forme linéaire. Il parle alors d'hyperplan (p.63) :

(i) *Le noyau d'une forme linéaire* ***non nulle*** *est un* ***hyperplan***

(ii) *Tout hyperplan est le noyau d'(au moins) une forme linéaire* ***non nulle***

(iii) *Toute forme linéaire* ***non nulle*** *est surjective*

(iv) *Deux formes linéaires* $\neq 0$ *ont même noyau ssi elles sont proportionnelles*.

Un exemple est donné.

La <u>deuxième section</u> s'intitule "*Orthogonalité*"

Méthode 4 : Comment utiliser l'orthogonal d'un s-ev

Tout comme Escofier, Merlin donne la définition de l'orthogonal d'un sous-espace de *E* et d'un sous-espace de *E**, en utilisant la même notation ($\perp$) :

Si le sous-espace *F* est inclus dans *E* : $F^\perp = \{\varphi \in E^* \text{ tq : } \forall x \in F : \langle \varphi, x \rangle = 0\}$;

si le sous-espace *G* est inclus dans *E** : $G^\perp = \{x \in E \text{ tq : } \forall \varphi \in G : \langle \varphi, x \rangle = 0\}$.

Merlin rappelle que comme on est en dimension finie, on peut identifier *E* et son bidual. Il explique aussi la notation F° utilisée par d'autres auteurs pour l'orthogonal d'un sous-espace *F* (inclus dans *E* ou *E**). Il ajoute qu'il se permet d'utiliser la notation $F^\perp$ car à son avis, "*ce n'est pas une source de confusion puisqu'on sait toujours dans quel espace se trouve la partie en question. Ce serait plutôt l'accumulation de notations (* $F^\circ, F^\perp$ *) qui entraînerait cette confusion.*" (p.64).

Il cite ensuite quatre propriétés importantes impliquant les orthogonaux de sous-espaces :

(i) $F \subset G \Rightarrow \left(G^\perp \subset F^\perp \text{ et } \left(F^\perp\right)^\perp = F\right)$;

(ii) $\dim F^\perp = n - \dim F$, où *n* est la dimension de l'espace vectoriel dont *F* est sous-espace ;

(iii) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ et $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;

(iv) $(\mathrm{Ker}\ \varphi)^\perp = \mathrm{Vect}(\varphi)$, où $\mathrm{Vect}(\varphi)$ est le sous-espace du dual engendré par φ. Cette propriété revient à dire que des formes linéaires qui ont même noyau sont proportionnelles.

Méthode 5 : Comment utiliser l'orthogonal d'une partie

Merlin présente une finalité outil-résolution des annulateurs : par exemple, lorsque les orthogonaux de deux sous-espaces sont simples à exprimer, montrer l'égalité de deux sous-espaces, revient à montrer l'égalité de leurs orthogonaux. Ou encore pour montrer qu'une famille de vecteurs est génératrice d'un espace vectoriel, on montre que l'orthogonal de l'espace engendré par ces vecteurs est réduit à l'origine, ce qui revient à montrer qu'une forme linéaire qui s'annule sur tous les vecteurs de la famille est nulle partout.

La troisième section du chapitre 4 présente les *bases duales*.

Méthode 6 : Comment déterminer la base duale

Merlin rappelle la définition de la base duale d'une base (e_i) de E. Il la note (e_i^*). Il rappelle le principe pour la détermination d'une base duale : il s'agit d'expliciter la définition en tenant compte de l'expression particulière des vecteurs et des formes sur l'espace envisagé. Il précise que statistiquement parlant, les exercices sur la dualité ont souvent pour cadre un espace de polynômes. Dans ces cas-là, il suggère de penser, non seulement à la base canonique, mais également à la base des polynômes interpolateurs de Lagrange.

L'auteur rappelle la propriété qui dit que si une famille de vecteurs de E et une famille de formes linéaires définies sur E vérifient la relation définissant les bases duales, ces deux familles sont automatiquement des bases de leurs espaces respectifs.

Des exemples sont donnés pour E = espace des polynômes.

La quatrième et dernière section du chapitre "Dualité" s'intéresse à la *transposée*.

Méthode 7 : Comment déterminer la transposée de f ?

Merlin rappelle la définition de la transposée d'une application linéaire $f: E \to F$ en termes de composition de fonctions : il s'agit de l'unique application linéaire de F^* dans E^* telle que : $\forall \psi \in F^* \quad {}^t f(\psi) = \psi \circ f$, ou dit de manière plus développée : $\forall \psi \in F^* \quad \forall x \in E \quad \left\langle {}^t f(\psi), x \right\rangle_E = \left\langle \psi, f(x) \right\rangle_F$. Merlin fait ensuite l'analogie avec la définition de l'adjoint d'un endomorphisme, "*pour ceux qui maîtrisent l'algèbre bilinéaire*". Un exemple est donné en prenant l'opérateur de dérivation sur l'espace des polynômes $\mathbb{R}_n[X]$.

L'auteur précise qu'il faut de la rigueur pour savoir dans quel espace on se trouve lorsqu'on traite des exercices faisant intervenir la transposée.

Méthode 8 : Comment utiliser la transposée

Pour répondre à la question posée dans le titre de la méthode, Merlin rappelle d'abord quatre propriétés concernant la transposée, dont le théorème fondamental de l'algèbre linéaire (ii) :

(i) $rg(f) = rg({}^t f)$

(ii) $\mathrm{Ker}({}^t f) = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$ et $\mathrm{Im}({}^t f) = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$

(iii) ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$

(iv) F est stable[12] par $f \Leftrightarrow F^\perp$ est stable par ${}^t f$.

[12] On rappelle qu'un sous-espace F est stable par une transformation linéaire f si et seulement si $\forall v \in F$: $f(v) \in F$.

Merlin précise que la relation (iv) est souvent utilisée dans les démonstrations par récurrence car si $f(F) \subset F$ (sous espace F stable par f), on peut considérer la restriction de f à F. Un exemple géométrique est donné. Il ajoute que la transposée intervient comme outil-démonstration dans le théorème de trigonalisation qu'il présentera au chapitre 9 consacré aux méthodes de réduction théoriques.

Enfin, il dit en remarque qu'il y a égalité entre la transposée de la matrice d'une application linéaire f et la matrice de l'application transposée ${}^t f$ en précisant les bases par rapports auxquelles les matrices sont exprimées.

A la fin du chapitre 4 consacré à la dualité, Merlin cite des erreurs fréquemment commises, et des astuces pour la résolution d'exercices. Des exercices sont ensuite énoncés et corrigés. Parmi les erreurs citées, il y a la tendance à :

- considérer la composition de deux formes linéaires, ce qui n'a évidemment aucun sens ;
- travailler avec des matrices lorsqu'on aborde la dualité, ce qui est délicat car il ne faut pas oublier d'établir les bases par rapport auxquelles on se positionne ;
- oublier que les méthodes présentées concernent la dimension *finie*, où on peut considérer qu'il y a équivalence entre un espace vectoriel et son bidual, entre un sous-espace F et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$;
- oublier le fait que le noyau de la *forme linéaire nulle* n'est pas un hyperplan, mais l'espace tout entier : un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire *non nulle*.

On retrouve l'utilisation de la dualité au **chapitre 6** consacré aux méthodes de calculs matriciels (2$^{\text{ème}}$ partie). A la deuxième section dédiée à la trace, il énonce une méthode qui demande d'utiliser le fait que « toute forme linéaire est une trace ». Il s'agit là d'une finalité outil-résolution de la dualité. Il en est de même à la cinquième section de ce chapitre consacrée aux espaces stables dans la méthode 19 qui propose d'utiliser la transposition : l'intérêt est important dans le cas de recherche d'hyperplan stable par A : cela revient à rechercher des droites stables par ${}^t A$, c'est-à-dire des espaces propres.

C'est ensuite au **chapitre 9** que Merlin reparle de la dualité. Ce chapitre est consacré aux méthodes de réduction théorique. A la cinqième section de ce chapitre ("Réductions simultanées"), l'idée 8 propose d'utiliser une récurrence et la transposition comme outil-démonstration pour la propriété affirmant que deux endomorphismes trigonalisables qui commutent sont cotrigonalisables (c'est-à-dire trigonalisables dans une même base).

Enfin, au **chapitre 14** dédié aux méthodes générales d'algèbre bilinéaire, dans la première section qui explique comment étudier les propriétés des formes, se trouve la méthode 9 qui s'intéresse à la décomposition de Gauss d'une forme hermitienne. La finalité outil-définition est donc mise en œuvre puisque pour toute forme hermitienne, il existe une décomposition en somme de modules de formes linéaires (décomposition de Gauss).

Ensuite, la méthode 10 explique comment déterminer l'orthogonal d'une partie. L'orthogonal d'un sous-espace exprimé à l'aide d'une forme bilinéaire est comparé à l'orthogonal défini au sens de la dualité. C'est donc une finalité outil-analogie de la dualité qui est mise en œuvre.

Peu après, dans cette même section, la méthode 16 s'intéresse à la façon de déterminer une base orthonormale. Cette méthode suppose qu'on ait trouvé une décomposition de Gauss pour une forme quadratique q qui fasse intervenir n formes linéaires, où n est la dimension de l'espace considéré : $q(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i L_i(x)^2$. Par construction ces n formes sont linéairement indépendantes ; si on en détermine la base duale (donc une base de E), elle sera bien orthogonale, puisque la matrice de q dans cette base sera diagonale.

Enfin, au **chapitre 18** qui clôture son livre, Merlin résume en quatre pages ce qu'il considère comme l'essentiel de l'algèbre. Il y rappelle que lorsqu'on manipule des sous-espaces stables, il est bon de se servir de la transposée.

En conclusion, on peut dire que Merlin considère la dualité comme un outil à bien des égards : on y trouve des finalités outil-analogie, outil-résolution, outil-définition et outil-démonstration. On pouvait se douter que, vu la spécificité de son ouvrage, la dualité allait principalement être présente sous le statut d'outil.

2.5. Le livre de Uhlig : un cas particulier

Dans notre analyse de manuels, nous pouvons qualifier de *cas particulier* le livre d'Uhlig (2002) car cet auteur ne présente pas la dualité en tant qu'objet dans son ouvrage. Pourtant, elle y est belle et bien présente, tout au long des chapitres.

Dans sa préface, Uhlig annonce que son livre met l'accent sur les concepts d'algèbre linéaire et de la théorie des matrices. De fait, les matrices sont omniprésentes dans son ouvrage. Il met l'accent sur l'interprétation des concepts présentés. Dès le **premier chapitre**, consacré aux applications linéaires, il affirme très rapidement (p. 19) que les applications linéaires et les vecteurs sont les objets fondamentaux de l'algèbre linéaire. Peu de temps après (p. 22), il dit que les applications linéaires $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ sont constituées de *m* composantes : les fonctions $f_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. On a donc : $f=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$.

A la page 24, il présente le théorème de Riesz sous forme de lemme : une application $f(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est linéaire si et seulement si $f(x)$ peut s'exprimer comme un produit scalaire $a\cdot x$ pour un vecteur fixé $a\in\mathbb{R}^n$ dépendant de *f* et pour tout $x\in\mathbb{R}^n$. Uhlig précise ensuite la manière dont le vecteur *a* est uniquement déterminé par *f* : $a=\begin{pmatrix} f(e_1)\\ \vdots\\ f(e_n)\end{pmatrix}$ où $\varepsilon=(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ce vecteur *a* ainsi défini est appelé le vecteur colonne de Riesz de *f* en rapport avec la base canonique ε de $\mathbb{R}^n$.

Grâce à cette interprétation, l'auteur effectuera une lecture des matrices aussi bien colonne par colonne que ligne par ligne, mettant en avant le caractère dual de l'interprétation.

A la page 25, il dit qu'il est plus facile de représenter le produit scalaire ***a . x*** comme le produit d'une représentation de ***a*** par un vecteur ligne et d'une représentation de *x* par un vecteur colonne. Il enchaîne en disant :

> This is done solely for convenience at this moment. This row-times-column convention for dot products enables us to use a magnificient **shorthand notation** for linear transformations.

A la page 29, il précise qu'il est capable de classifier toutes les applications linéaires $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ comme des multiplications d'une matrice et d'un vecteur : $f(x)=Ax$, pour une matrice $A_{m,n}$ fixée et dépendant de *f*, un vecteur arbitraire *x* de $\mathbb{R}^n$ et l'image $f(x)$ de $\mathbb{R}^m$ (il ne considère que les bases canoniques dans les six premiers chapitres). Cette remarque va lui permettre de traiter toutes les applications linéaires à travers les matrices, et il ne va pas s'en priver par la suite.

A la page 31, il décrit une transformation de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ à l'aide d'équations. Il utilise ensuite l'écriture matricielle pour réécrire la transformation. Il précise que la notation matricielle nous aide à décrire plus simplement des équations compliquées. Le lecteur peut alors constater que les lignes de la matrice reprennent les équations décrivant la transformation, ce que nous pouvons interpréter comme une référence à la dualité en algèbre linéaire. On peut percevoir là une finalité *outil-résolution* de la dualité.

Le **deuxième chapitre** du livre est consacré à la réduction d'une matrice à la forme échelonnée par lignes. C'est dans ce chapitre qu'il définit le rang d'une matrice *A* comme étant le nombre de pivots dans la forme échelonnée par la ligne de la matrice *A*.

Le **chapitre 3** est consacré aux équations linéaires. La compatibilité d'un système linéaire d'équations $Ax = b$ est présentée en termes de rang ; et l'unicité d'une solution est à la condition que chaque colonne de la matrice échelonnée par ligne de la matrice *A* contienne un pivot. Le noyau (d'une matrice *A*) est également défini dans ce chapitre, car il intervient pour décrire l'ensemble solution de l'équation matricielle $Ax = b$.

Le **chapitre 4** est dédié aux sous-espaces. L'auteur commence par définir l'image d'une matrice *A*. Il rappelle ensuite qu'en théorie des ensembles, tous les sous-ensembles d'un ensemble donné peuvent être représentés de deux façons intrinsèques et équivalentes, à savoir inclusivement ou exclusivement. Il écrit alors explicitement (p.115) :

> We apply this dual representation of sets to linear algebra.

Il donne tout d'abord la définition inclusive d'un sous-espace en définissant alors le "Span d'un ensemble de vecteurs", c'est-à-dire le sous-espace engendré par un ensemble de vecteurs comme étant l'ensemble des combinaisons linéaires de cet ensemble de vecteurs.

Pour introduire la représentation exclusive d'un sous-espace, il fait appel à la notion d'orthogonalité (qui sera davantage détaillée au chapitre 10 de son livre). L'auteur explique que dans $\mathbb{R}^n$, il est parfois plus adéquat de décrire un sous-espace *U exclusivement*, en demandant que tous les vecteurs *u* de ce sous-espace soient orthogonaux à quelques vecteurs directeurs $a_i \in \mathbb{R}^n$, exclus du sous-ensemble *U*. Uhlig définit alors le sous-espace $U^\perp$ complément orthogonal d'un sous-espace *U* de $\mathbb{R}^n$.

Le théorème 4.1 (p.118) affirme que tout sous-espace *U* de $\mathbb{R}^n$ peut être représenté de deux façons équivalentes et complémentaires :

→ comme un *span* de certains vecteurs de U :

$$U = Span\{u_1, ..., u_k\} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_k \\ | & & | \end{pmatrix}$$

pour certains vecteurs $u_i \in U$;

→ ou comme un *noyau* :

$$U = Ker\begin{pmatrix} — & a_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & a_l^T & — \end{pmatrix} = Span\{a_1,...,a_l\}^{\perp} = \{x_{\text{hom}}\}$$

pour certains vecteurs $a_i \in \mathbb{R}^n$; où $\{x_{\text{hom}}\}$ désigne les solutions du système linéaire homogène $\begin{pmatrix} — & a_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & a_l^T & — \end{pmatrix} x = 0$.

Le théorème se termine en disant que si $U = Ker(A) = Span\{a_1,...,a_l\}^{\perp} \subset \mathbb{R}^n$ est définit de manière exclusive par une matrice $A_{l\,n}$, alors l'ensemble de toutes les solutions homogènes x_{hom} du système d'équations linéaires $Ax = 0$ engendre *U*.

On peut percevoir là une finalité *outil-définition* de la dualité.

L'auteur poursuit le chapitre en décrivant des méthodes permettant de passer d'une représentation inclusive (*Span*) à une représentation exclusive (*Noyau*) d'un même sous-espace.

Bref, tout au long de ce chapitre, la dualité est utilisée par l'auteur.

Le **chapitre 5** a pour titre « dépendance linéaire, bases et dimension ». On y retrouve une section expliquant comment trouver une base pour les deux représentations génériques d'un sous-espace.

Le **chapitre 6** est dédié à la composition d'applications linéaires, à la matrice inverse et à la matrice transposée. Attardons-nous un instant sur la présentation qu'Uhlig y fait de la transposée d'une matrice. Après avoir rappelé la définition de la transposée d'un vecteur ligne en un vecteur colonne qui avait été donnée dans l'introduction, l'auteur définit la transposée d'une matrice A (inversion des lignes et des colonnes). Viennent ensuite des théorèmes comme $B^T A^T = (AB)^T$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. La transposée n'est ensuite plus présentée que pour la transposition d'une matrice de permutations utilisée dans la présentation de l'élimination de Gauss vue sous forme de produits de matrices.

L'auteur présente ensuite une vue duale de la multiplication matricielle *A.B* :

> The foregoing exposition gives us a **dual view** of matrix multiplication A times B. It depends on which object we focus on: either on the columns of the first matrix factor **A** or on the rows of the second one **B**. (Uhlig 2002, p.191).

Les égalités suivantes peuvent illustrer ces propos :

$$AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \sum_{i=1}^{n} b_{i1} \begin{pmatrix} | \\ a_i \\ | \end{pmatrix} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} b_{i1} \begin{pmatrix} | \\ a_i \\ | \end{pmatrix} \\ | & & | \end{pmatrix}$$ d'une part et

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} — & b_1 & — \\ & \vdots & \\ — & b_n & — \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \begin{pmatrix} — & b_j & — \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \begin{pmatrix} — & b_j & — \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$ d'autre part.

On peut reconnaître là une finalité *outil-illustration* de la dualité.

On perçoit aussi la dualité dans le **chapitre 7**, consacré aux coordonnées de vecteurs et aux changements de base, car l'auteur présente dans ce chapitre le théorème disant que le rang d'une matrice A et de sa transposée A^T sont les mêmes pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. La démonstration de ce théorème fait bien évidemment appel à la forme échelonnée par ligne de la matrice *A*, étant donné que c'est sous cet angle que sont abordés la plupart des concepts présentés dans cet ouvrage.

Cette propriété de la matrice transposée est utilisée dans la preuve[13] du corollaire suivant :

Soit $U = Span\{u_1, ..., u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ et supposons que le vecteur $a \notin U$. Alors, il existe un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $b \perp U$. De plus, $0 \neq b \notin U$.

On voit donc intervenir la finalité *outil-démonstration* de la dualité dans l'ouvrage d'Uhlig.

Remarquons l'importance de ce corollaire qui, par exemple, motive la méthode des moindres carrés.

Dans le **chapitre 8**, qualifié d' « optionnel » par l'auteur, et intitulé « Déterminants et $\lambda-$matrices », on ne retrouve de la transposée que la propriété disant que le déterminant d'une matrice et de sa transposée sont égaux. Le chapitre suivant, dédié aux valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice, ne fait pas référence à la dualité.

On aperçoit la dualité dans le **chapitre 10** consacré aux bases orthogonales et aux matrices orthogonales. Bien entendu on retrouve la transposée d'une matrice quand on parle de matrice orthogonale (cas réel), mais les propriétés présentées au chapitre 4 (représentations inclusive et exclusive d'un sous-espace vectoriel) du présent ouvrage mettent davantage en lumière l'apport d'une approche duale quand il s'agit de compléter un ensemble de vecteurs orthonormés pour obtenir une base de $\mathbb{R}^n$ (p.325). Un peu plus loin dans ce chapitre pour introduire la factorisation QR d'une matrice, l'auteur dit explicitement qu'il a utilisé à plusieurs reprises dans son ouvrage des concepts duaux (p. 334) :

> We study Householder matrices as generators of the orthogonal ones, all in view of general orthogonal matrix factorizations.
>
> Our early chapters were built on several twofold, or **dual, concepts**:
>
>> A matrix A was defined by its entries a_{ij}, or as the representation of a linear transformation $x \mapsto Ax$.

[13] Voir chapitre 3, § 1.1, « **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** ».

> > The solvability and unique solvability of a linear system $Ax = b$ were determined by row and by column properties of a REF[14] of A.
> >
> > The product of two matrices was viewed as a linear replacement of the columns of the first factor or as the same for the rows of the second matrix factor.
>
> Here is another dual concept for matrices: that of an additive and a multiplicative generation of matrices.

Nous n'explorerons pas davantage les chapitres suivants, consacrés aux valeurs propres de matrices symétriques et normales[15], aux valeurs singulières, et aux techniques numériques de base en algèbre linéaire, où la dualité n'est pas présente, ou tout au moins pas de manière aussi évidente que dans les chapitres précédents.

[14] REF : Row Echelon Form.

[15] Une matrice réelle A_{nn} est normale si $A^T A = AA^T$. Une matrice complexe A_{nn} est normale si $A^* A = AA^*$.

Annexe 4. Formule de quadrature pour un polynôme de degré inférieur à *n*

Au chapitre 3, pour illustrer le fait que des notions de dualité pouvaient être mises en fonctionnement à un niveau disponible (Robert 1998), nous avons proposé la tâche suivante :

Montrer que, si *I* est un intervalle réel, et que $t_1,...,t_n$ sont *n* points distincts, il existe n nombres $m_1,...,m_n$ tels que, pour tout polynôme *p* de degré inférieur *n*, on peut écrire :

$$\int_I p(t)dt = m_1 p(t_1) + ... + m_n p(t_n) \quad \text{(formule de quadrature).}$$

Pour mener à bien cette tâche, nous proposons la démonstration suivante, inspirée de Lax (2007, p. 17-18) :

Désignons par *X* l'espace vectoriel des polynômes $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_{n-1} t^{n-1}$ de degré inférieur à *n*. On a dim(*X*) = *n*.

Définissons *n* fonctions f_i $(i = 1,...,n)$ par $f_i :\ \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ p & & f_i(p) = p(t_i) \end{array}$.

On vérifie aisément qu'il s'agit de formes linéaires définies sur *X*, c'est-à-dire que les formes linéaires f_i appartiennent au dual de *X* que nous noterons *X'*.

Ces formes linéaires f_i $(i = 1,...,n)$ sont linéairement indépendantes. En effet :

> Montrons que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0 \Rightarrow (\forall i = 1,...,n : \alpha_i = 0)$.
>
> Or, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall p \in X : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(p) = 0\right)$
>
> $$\Leftrightarrow \quad \left(\forall p \in X : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p(t_i) = 0\right) \qquad (1)$$
>
> Définissons maintenant le polynôme q_k tel que $q_k(t) = \prod_{i \neq k} (t - t_i)$. Ce polynôme, de degré (*n*-1), appartient donc à *X*. Nous pouvons donc particulariser la relation (1) en prenant $p = q_k$. Comme de par sa définition, $\forall i \neq k : q_k(t_i) = 0$, la relation (1) particularisée à q_k donne :
>
> $$\alpha_k q_k(t_k) = 0 \qquad (2)$$
>
> Or, toujours par la définition de q_k, $q_k(t_k) \neq 0$. Par (2), on a donc que $\alpha_k = 0$.
>
> Comme ce raisonnement peut être tenu pour tout $k \in [1,...,n]$, on a bien que $\forall i = 1,...,n : \alpha_i = 0$.

On a donc *n* formes linéaires f_i $(i = 1,...,n)$ linéairement indépendantes dans un espace de dimension de dimension *n* (car dim *X'*= dim *X* = *n*). Les formes linéaires f_i $(i = 1,...,n)$

constituent donc une base de *X'*. Ainsi, tout élément du dual peut s'écrire comme combinaison linéaire des f_i $(i=1,\dots,n)$:

$$\forall f \in X' : \left(\exists m_i \in \mathbb{R} : f = \sum_{i=1}^{n} m_i f_i \right) \qquad (3)$$

Or, l'intégrale, sur un intervalle *I*, d'un polynôme est une forme linéaire définie sur *X*, et est donc un élément du dual *X'*. On peut donc particulariser (3) en remplaçant *f* par $\int_I \bullet \, dt$. On a donc bien : $\exists m_i \in \mathbb{R} : \quad \forall p \in X :$

$$\begin{aligned} f(p) &= \sum_{i=1}^{n} m_i f_i(p) \\ \int_I p(t)dt &= \sum_{i=1}^{n} m_i f_i(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i p(t_i) \quad \square \end{aligned}$$

Annexe 5. Contexte de l’enseignement de la dualité à l’université de Namur

Cette annexe se compose de deux parties :

1. Nous présentons dans un premier temps (§ 1) la table des matières du polycopié qui sert de support au cours théorique d’algèbre linéaire en première année pour les sections mathématique et physique à l’université de Namur (Belgique). Comme dans l’Annexe 3, afin d’avoir une vision d'ensemble de l'endroit d'introduction et/ou d'utilisation des thèmes liés à la dualité dans le domaine de l’algèbre linéaire, nous avons ajouté à la table des matières, des notations entre crochets (**[ ]**). Il s'agit des sujets et thèmes que nous avons définis pour le secteur dualité. Pour éviter toute ambiguïté avec les composantes de la table des matières elle-même, ces notations sont <u>**en caractères gras et soulignées**</u>.
2. Dans un second temps (§ 2), nous présentons les pages de ce polycopié (Toint 2007) concernant la dualité. Ces pages proviennent du polycopié d’une étudiante inscrite en première année en mathématiques à l’université de Namur en 2008-2009. Cette étudiante, en assistant au cours, complétait les informations reprises dans le polycopié par les explications que le professeur donnait au cours théorique.

1. Table des matières du livre de Toint (2007)

Chapitre 1. Espaces vectoriels
- 1.1. Quelques propriétés des ensembles et des fonctions
- 1.2. Structures algébriques
  - 1.2.1. Groupe
  - 1.2.2. Anneau
  - 1.2.3. Corps
  - 1.2.4. Espace vectoriel
  - 1.2.5. Exemples
- 1.3. Dépendance linéaire et dimension
  - 1.3.1. Sommation
  - 1.3.2. Dépendance linéaire
  - 1.3.3. Bases et dimension
- 1.4. Sous-espaces vectoriels
  - 1.4.1. Sous-espaces
  - 1.4.2. Dimension d’un sous-espace
  - 1.4.3. Somme directe

Chapitre 2. Applications, transformations et formes linéaires
- 2.1. Applications linéaires
  - 2.1.1. Définition
  - 2.1.2. Notions et propriétés d’isomorphisme d’espaces vectoriels
  - 2.1.3. Noyau et image d’une application linéaire
- 2.2. Transformations linéaires
- 2.3. Matrices et transformations linéaires
  - 2.3.1. Construction d’une matrice
  - 2.3.2. Opérations sur les matrices
  - 2.3.3. Matrices et changement de base

6.1.8. Rang, noyau et image des applications linéaires adjointes [**théorème fondamental de l'algèbre linéaire**]

6.2. Transformations unitaires

6.2.1. Transformations unitaires et changement de coordonnées orthogonales

6.2.2. Propriétés élémentaires des matrices unitaires

6.2.3. Réflecteurs et réduction à la forme triangulaire

6.2.4. Diagonalisation des matrices unitaires

Chapitre 7. Formes hermitiennes

7.1. Transformations auto-adjointes

7.1.1. Définition et matrice associée

7.1.2. Structure propre

7.1.3. Quotient de Rayleigh

7.1.4. Propriétés extrémales des valeurs propres

7.2. Classification des formes hermitiennes

7.2.1. Congruence et inertie

7.2.2. Matrices hermitiennes définies positives

7.2.3. Matrices semi-définies positives

7.3. Autres problèmes hermitiens

7.3.1. Problème aux valeurs propres généralisé et biréduction

7.3.2. Valeurs singulières

Chapitre 8. Normes matricielles : définitions et propriétés élémentaires

8.1. Normes matricielles compatibles

8.2. Quelques normes matricielles usuelles

8.3. La trace d'une matrice

8.4. Propriétés élémentaires des normes matricielles

8.5. Normes matricielles et matrices inverses

Chapitre 9. Projections et inverse généralisé

9.1. Projections

9.1.1. Projections dans un espace vectoriel

9.1.2. Projections orthogonales dans un espace métrique

9.2. L'inverse généralisé

Chapitre 10. Systèmes d'équations linéaires

10.1. Systèmes carrés

10.1.1. Règle de Cramer

10.1.2. Elimination de Gauss

10.1.3. Factorisation triangulaire

10.1.4. Permutations et pivotage

10.1.5. Factorisation orthogonale

10.2. Problèmes aux moindres carrés

10.2.1. Equations normales

10.2.2. Orthogonalisation

10.2.3. Décomposition en valeurs singulières

2. Pages du polycopié (Toint 2007) présentant la dualité

Nous présentons ici l'extrait du polycopié du cours d'algèbre linéaire (Toint 2007) annoté par une étudiante.

> **Théorème 2.21** Le produit AB de deux matrices rectangulaires A et B est défini comme la matrice associée au produit des applications linéaires représentées par A et B (par rapport aux mêmes bases) et aura donc un sens si et seulement si le nombre de lignes de B est égal au nombre de colonnes de A. La matrice produit aura le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B.
>
> $(n, m) \cdot (m, z) = (n, z)$

La règle de multiplication de matrices rectangulaires peut alors s'écrire, de manière tout à fait analogue à la multiplication des matrices carrées, comme

$$[fg]_{ij} = \sum_{k=1}^{dim(F)} [f]_{ik}[g]_{kj}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, \; \dim(G), \quad \forall\, j = 1, \ldots, \; \dim(E).$$

Les règles de multiplication de matrices carrées et rectangulaires sont donc identiques.

2.5 Formes linéaires

Nous commencons par définir ce que nous entendons par forme linéaire.

Définition 38 *Une forme linéaire sur un espace vectoriel E est une application y de E dans $\mathbb{K}$ définie pour tout vecteur x et satisfaisant la propriété* [illegible] d'un vecteur, on fait [illegible]

$$\forall x, z \in E\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \;\; y(\alpha x + \beta z) = \alpha y(x) + \beta y(z), \tag{2.4}$$

où $\mathbb{K}$ est le corps associé à l'espace vectoriel E.

Donnons quelques exemples de formes linéaires :

1. Choisissons n scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans $\mathbb{K}$. Alors la fonction de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ qui, à $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ associe
$$y(x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$
est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.
2. En particulier, pour un j entre 1 et n fixé, la forme
$$y(x) = x_j$$
est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.
3. Remarquons qu'à partir d'une forme linéaire y_0 et d'un vecteur x_0 fixés, on peut toujours construire la transformation linéaire définie par
$$f(x) = y_0(x) x_0.$$

41

4. On remarque immédiatement que par linéarité, toute forme linéaire envoie l'origine de l'espace sur le zéro du corps associé

$$y(0+0) = y(0) = y(0) + y(0) \quad \Rightarrow \quad y(0) = 0.$$

Nous pouvons définir la somme de deux formes linéaires de manière naturelle par la relation

$$(y_1 + y_2)(x) = y_1(x) + y_2(x), \tag{2.5}$$

pour deux formes linéaires quelconques y_1 et y_2 et tout vecteur x. De même, on définira la multiplication scalaire par la relation

$$(\alpha y)(x) = \alpha y(x) \tag{2.6}$$

pour tout x et toute forme linéaire y.

Plus généralement, ces propriétés peuvent être résumées dans le théorème suivant :

Théorème 2.22 Toute combinaison linéaire de formes linéaires est une forme linéaire.

Matrice pr une forme linéaire : $E \to K \Rightarrow \dim K = 1$ ligne et $\dim E$ colonnes

Nous pouvons également associer, une fois les bases de E et du champ des scalaires $\mathbb{K}$ fixées, une matrice à une forme linéaire : par exemple, si nous considérons un espace vectoriel à champ de scalaires $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, les applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$ ne sont donc rien d'autre que les formes linéaires sur E. Il est alors facile de voir que la matrice associée à une forme linéaire (par rapport aux bases canoniques par exemple) possède une ligne et $dim(E)$ colonnes. Par exemple, si on choisit la base canonique $\{1\}$ dans $\mathbb{K}$, la matrice

$$(a_1\ a_2\ \ldots\ a_n) \Rightarrow n = \dim E$$

représente la forme linéaire y définie par la relation

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad \forall x \in E$$

en supposant que le vecteur x s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

dans la base $\{e_i\}$.

On obtient la valeur de cette forme linéaire appliquée à un vecteur x particulier en multipliant simplement le vecteur x par la matrice donnée ci-dessus, comme on peut le vérifier aisément. On peut donc dire qu'une forme linéaire peut se représenter comme un vecteur (ou une matrice) ligne.

$$y(x) = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [y]_e^1\ [x]^e = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$\triangle$ le crochet de dualité est $\boxed{\text{bilinéaire}}$

$\ast\ [\alpha x + \beta z, y] = \alpha[x,y] + \beta[z,y]$

$\rightarrow y(\alpha x + \beta z) = \alpha y(x) + \beta y(z)$ → déf de forme lin

$\ast\ [x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x,y] + \beta[x,z]$

$\Rightarrow \alpha y + \beta z(x) = \alpha y(x) + \beta z(x)$ LINÉARITÉ (linéaire / à son 2ème arg).

Théorème 223 → ce n'est pas vraiment une démo mais qqch qu'on impose

$\underset{\in E}{x} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ (→ unique)

$\hookrightarrow$ unique

si $y \in E' \Rightarrow y(x) = [x,y] = y\left(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\beta_i x_i}_{\text{unique}}\right) = \sum \beta_i\ [x_i, y]$.

Ds le théo, on dit : $[x_i, y] = \alpha_i$

avec y qui est l'unique y ... à ...

$\Rightarrow y(x) = \sum \beta_i [x_i, y] = \sum \underbrace{\beta_i \alpha_i}_{\text{UNIQUE}}$ ⊛

→ le critère unicité est respecté, il n'existe dc qu'une seule forme linéaire

⊛ C'est une forme linéaire qui fait correspondre α_i et donc ... unique car β_i est unique

persop42

Nous reviendrons à nouveau sur cette représentation par une matrice ligne dans le contexte des espaces métriques.

2.5.1 Espace dual

~ $E' = \{$formes lin. sur E, $+$, $\cdot\}$ est un espace vect

Si l'on considère l'ensemble des formes linéaires sur un espace vectoriel E, en le munissant de l'addition et de la multiplication par un scalaire que nous venons d'envisager, on peut voir (à faire en exercice) que cet ensemble est bien un espace vectoriel. Il s'agit de ***l'espace dual de E***.

Définition 39 *L'espace (vectoriel) dual E' d'un espace vectoriel E est composé de l'ensemble des formes linéaires sur E, muni de la loi interne d'addition (2.5) et de la multiplication par un scalaire (2.6).*

Les vecteurs de l'espace dual sont donc des formes linéaires.

Nous allons maintenant introduire une notation supplémentaire, mais qui va nous faciliter le travail. Au lieu de noter l'image des formes linéaires $y(x)$ comme plus haut, nous noterons

$[x,y] = y(x) \in \mathbb{R}$

$$y(x) = [x, y].$$

Cette notation introduit une symétrie implicite entre les vecteurs de E et ceux de son dual E'. Nous pouvons alors réécrire la propriété (2.4) sous la forme

$$[\alpha x + \beta z, y] = \alpha[x, y] + \beta[z, y], \tag{2.7}$$

tandis que la propriété caractéristique des opérations sur les formes linéaires (les vecteurs du dual) s'écrit

$$[x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z]. \tag{2.8}$$

BILINÉAIRE

Nous prouvons ensuite deux propriétés importantes :

Théorème 2.23 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\{x_i\}_{i=1}^n$ une base de E et soit $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ un ensemble de n scalaires. Alors, il existe une et une seule forme linéaire y dans E' telle que

$$[x_i, y] = \alpha_i \quad = y(x_i)$$

pour $i = 1, \ldots, n$. $\exists! y \in E' : y(x_i) = \alpha_i$

~ ∀ Pr un E de n scalaires α_i, ∃ une et une seule forme lin telle que $y(x_i) = \alpha_i$

Preuve.

Chaque x de E peut s'écrire sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

43

Dém. 2.21.

) Par le thm précédent, on sait que pr chaque j ($\to$ pr chaque α_j), il existe **un et un seul** y_j qui peut répondre à ce qu'on veut démontrer.

) On veut mq $\{x_i\}_{i=1}^n$ et $\{y_i\}_{i=1}^n$ $\to$ base ? sont même dim. $\to$ On sait déjà qu'ils ont le même nombre de vecteurs. Reste à montrer que $\{y_i\}_{i=1}^n$ sont L.I. et générateur.

$\to$ $\{y_i\}_{i=1}^n$ L I ?

Supposons une combinaison linéaire qui soit nulle :

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i(x) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_i = 0$$

$$\equiv$$

$$\forall x \in E \; [x, \sum \alpha_i y_i] \underset{lin}{=} \sum \alpha_i [x, y_i] = 0$$

Soit $x_j \in E$: $\sum \alpha_i [x_j, y_i] = 0$

Par la base qu'on s'impose :

$$\sum \alpha_i \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$$

donc $\{y_i\}_{i=1}^n$ sont bien L.I.

$\to$ $\{y_i\}_{i=1}^n$ générateur ?

$\to$ Par le thm précédent, on sait que pr un y qq qui appartient à E' : $[x_i, y] = \alpha_i$

$\to$ pour un certain $x \in E$ (unicité de la base) : $x = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$

Dc $[x, \underbrace{y}_{\text{vect qq}}] = [\sum \beta_i x_i, y] = \sum \beta_i [x_i, y] = \sum \beta_i \alpha_i$

$$[x, \underbrace{y_j}_{\text{ds base}}] = \sum \beta_i \underbrace{[x_i, y_j]}_{\delta_{ij}} = \beta_j \Rightarrow \beta_i = [x, y_i]$$

$\Rightarrow$ En remplaçant dans $\bigcirc$, on a dc $[x, y] = \sum [x, y_i] \alpha_i$

$$= [x, \sum \alpha_i y_i]$$

$\to$ Puisque x est arbitraire $\Rightarrow$ $y = \sum \alpha_i y_i$

Donc $\{y_i\}_{i=1}^n$ nécessairement bien tous les mêmes de la base duale $\Rightarrow$ L I + GÉN = BASE

verso p. 43

d'une et une seule manière. Donc, si y est une forme linéaire de E',

$$[x,y] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i [x_i, y].$$

Comme les β_i sont uniques pour chaque x, et à cause de la relation imposée à y dans la thèse, on voit que le seul y satisfaisant nos conditions est défini par

$$[x,y] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i$$

pour tout vecteur x de E. □

Théorème 2.24 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\{x_i\}_{i=1}^n$ une base de E. Alors il existe une base $\{y_i\}_{i=1}^n$ du dual E' telle que

$$[x_i, y_j] = \delta_{ij}, \tag{2.9}$$

pour tous les i et j entre 1 et n.

= On peut trouver la base duale correspondant à une base primale qu'on fixe et u, grâce à δ_{ij}.

Preuve.

De la proposition 2.23, on peut déduire que, pour chaque $j = 1, \ldots, n$, il existe un seul y_j dans E' tel que (2.9) soit satisfaite. Il reste uniquement à vérifier que

$$X' = \{y_i\}_{i=1}^n$$

forme une base de E'. Vérifions d'abord que les vecteurs de X' sont linéairement indépendants. Pour cela, considérons une combinaison linéaire de ces vecteurs qui soit nulle. En d'autres mots, supposons que

$$[x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x, y_i] = 0$$

pour tout x dans E. Alors, nous avons, en choisissant $x = x_j$,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x_j, y_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j,$$

et ceci pour tout j entre 1 et n. Les vecteurs de X' sont donc linéairement indépendants. Considérons maintenant un vecteur y quelconque dans E' et notons

$$\alpha_i = [x_i, y] \quad (i = 1, \ldots, n),$$

ainsi que, pour un x quelconque de E,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i.$$

44

Thm 2.25

On l'a vu au thm 2.24 → à une base primale correspond une seule base duale (nous a bien prouvé au thm 2.24 que c'était une base) et elles ont le m̂ nombre de vecteurs. → m̂ dim.

Thm 2.26

Nous savons que deux espaces vectoriels, si ils sont construits sur le m̂ champ de scalaires et si ils ont m̂ dimension, sont isomorphes.

Si E est esp vect sur K, alors, E' l'est aussi car on a construit des lois qui s'y prêtent → $(\alpha y)(x) = \alpha y(x)$

→ $(y + y')(x) = y(x) + y'(x)$.

⇒ m̂ dim + construits sur le m̂ champ de scalaire

⇒ isomorphisme

verso p 44

On obtient alors

$$[x, y] = [\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i, y] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overbrace{[x_i, y]}^{\text{Lin}} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i. \tag{2.10}$$

D'autre part,

$$[x, y_j] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i [x_i, y_j] = \beta_j,$$

et donc, en rebaptisant l'indice,

$$\beta_i = [x, y_i].$$

En remplacant cette valeur dans (2.10), nous obtenons

$$[x, y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x, y_i] = [x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i].$$

Comme x est arbitraire, on en tire que

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i,$$

et tout y de E' est combinaison linéaire des vecteurs de X', ce qui achève la démonstration. □

Une conséquence très importante de ce résultat est le corollaire suivant :

> **Théorème 2.25** L'espace (vectoriel) dual E' d'un espace vectoriel E de dimension n est aussi de dimension n.

Preuve.

Evidente d'après la proposition 2.24. □

Une conséquence immédiate de la dernière proposition est exprimée dans la proposition suivante :

> **Théorème 2.26** Tout espace vectoriel de dimension finie E est isomorphe à son dual E'.

Preuve.

Ceci résulte directement du fait que si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, alors E' l'est aussi, grâce aux lois que nous avons construites pour en faire un espace vectoriel (définies en (2.5) et (2.6)). Par le théorème 2.25, nous savons qu'ils sont de même dimension, ils sont donc isomorphes (par le théorème 2.4).□

La base de l'espace dual définie comme plus haut (cfr (2.9)) est aussi nommée la *base duale* associée à une base du primal. Nous présentons encore un corollaire facile de la proposition 2.24 :

45

Lemme 2.27 → corollaire de $[x_i, y_j] = \delta_{ij}$.
vrai toujours.

$\Leftarrow$

$\forall x \in E$ et $\neq 0$, $\exists y \in E'$; $[x, y] \neq 0$

$\equiv$

Si on a un vecteur de notre ensemble formé qui est $\neq 0$ alors, il existe une forme linéaire qui envoie cet x sur un scalaire non nul

On a $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$, $Y = \{y_i\}_{i=1}^{n}$ (ils satisfont de $[x_i, y_j] = \delta_{ij}$.
base duale de X

Soit $x = \sum \beta_i x_i$

On avait que $\beta_i = [x, y_i]$ car $[x, y] = [\sum \beta_i x_i, y] = \sum \beta_i \underbrace{[x_i, y]}_{\delta_i} = \sum \beta_i \delta_i$

or,

pour un y_j : $[x, y_j] = [\sum \beta_i x_i, y_j]$
base duale $= \sum \beta_i \underbrace{[x_i, y_j]}_{\delta_{ij}} = \beta_j$

En fait, on prouve cela par la contraposée :

$\forall y \in E' : [x, y] = 0 \Rightarrow \exists x = 0$

Donc, on a comme hyp que $\forall y \in E' : [x, y] = 0 \Rightarrow$ cela est vrai pr un y_j en particulier.

$$\text{or, } [x, y_j] = \beta_j$$

$$\Rightarrow [x, y_j] = \beta_j = 0$$

$$\Rightarrow \text{Puisque } x = \sum \underbrace{\beta_i}_{=0} x_i = 0$$

$$\text{Donc, } x = 0$$

Cqfd.

Thm 228

Def de la matrice $\Rightarrow f(x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k$

$$\Rightarrow [f(x_j), y_i] = [\sum a_{kj} x_k, y_i] = \sum a_{kj} \underbrace{[x_k, y_i]}_{\delta_{ki}}$$

vrai de base duale.

$= a_{ij}$

Donc, $a_{ij} = [f(x_j), y_i]$.

verso p45

Théorème 2.27 Pour tout vecteur non nul x d'un espace vectoriel de dimension finie E, il existe une forme linéaire y dans E', le dual de E, telle que

$$[x, y] \neq 0.$$

Preuve.
Soient $\{x_i\}_{i=1}^n$ et $\{y_i\}_{i=1}^n$ une base de E et sa base duale dans E', (satisfaisant donc (2.9)). Si

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

(comme plus haut), alors $\beta_i = [x, y_i]$. Donc, si $[x, y]$ est nul pour tout y, et en particulier pour y_i $(i = 1, ..., n)$, alors tous les β_i sont nuls et x l'est aussi. □

On peut voir immédiatement que cette dernière proposition implique que si u et v sont deux vecteurs différents d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors il existe une forme linéaire y dans E' telle que $[u, y] \neq [v, y]$. Il suffit en effet de substituer $x = u - v$ dans la proposition 2.27.

A partir de la base duale d'une base du primal X, on peut reconstruire la matrice associée à une transformation linéaire par rapport à cette base X par l'intermédiaire de crochets de dualité :

Théorème 2.28 Soit

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

une base quelconque de l'espace vectoriel E (de dimension n). Soit

$$X' = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

la base duale dans E' définie par la proposition 2.24. Soit, de plus, (a_{ij}) la matrice d'une transformation linéaire f sur E. Alors, $\hookrightarrow [x_i, y_j] = \delta_{ij}$

$$[f]_X = \quad a_{ij} = [f(x_j), y_i].$$

Preuve.
Cette propriété résulte directement de la définition d'une matrice associée à une transformation linéaire par rapport à une base. En effet, nous avons que

$$f(x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k \quad (j = 1, ..., n). \tag{2.11}$$

et donc

$$[f(x_j), y_i] = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} [x_k, y_i] = a_{ij}$$

46

→ Pour trouver par ex a_{12} ⇝ on trouve $f(x_2)$ et puis on fait $y_1(f(x_2))$

Situat°:

Primal: $(E(K+.)\#.)$ ex: ens de dep contenant $\mathbb{R}^2\ (x_1,x_2)$

Dual: $(E'(K+.)\#.)$ ens de dep contenant des $y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

bidual $(E''(K+.)\#.)$ ens de dep contenant des $z:\mathbb{R}^{2'}\to\mathbb{R}$

ex: Si on dit que $r\in(\mathbb{R}^2)''$ dans $r:\mathbb{R}^{2'}\to\mathbb{R}$.

Thm 2.29

On sait que le bidual ≡ le dual du dual.

OR, le primal et le dual sont isomorphes. ⟹ le dual est iso au bidual ⟹ par effet "miroir": le primal est isomorphe à son bidual.

Thm 2.30 ⟶ "Construct° d'une correspondance entre le primal et le bidual" ⟹ Montrons juste qu'il est possible d'en construire une (⟶ linéaire + applicat°)

Mq $\forall x\in E$: ∃ une correspondance telle que $z_x(y)=y(x)$

Soit $x\in E$:

Puisque z_x est un élém^t du bidual ⟹ z_x a pour "domaine" E' et dc il est bien à valeurs ds K. Dc, z_x est bien une forme. Reste à savoir si elle est linéaire ⟶ On a défini des lois + et produit par un scalaire sur l'ensemble pour les formes linéaires ... est une forme linéaire car $z_x(\alpha y_1+\beta y_2)=(\alpha y_1+\beta y_2)(x)$

Puisque, par la thèse qu'on impose, $z(y)=y(x)$

$=\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)$

⟹ la relat° $z_x(y)=y(x)$ $=\alpha z_x(y_1)+\beta z_x(y_2)$

définit bien une forme linéaire sur E'

Ns avons dc prouvé que cette forme peut exister. Mnt, prouvons que cette relat° est vraie pour TOUS les élém^t du bidual

verso p46

en vertu de la relation (2.11). □

Autrement dit, pour trouver l'élement ij de la matrice associée à f par rapport à la base X, il suffit d'appliquer f au $j$ème vecteur de X et d'appliquer le $i$ème vecteur de X' au résultat (un vecteur de X' est, en effet, une forme linéaire sur E).

2.5.2 Réflexivité

Considérons maintenant le dual du dual de E, soit E'', appelé le *bidual* de l'espace vectoriel E. Ses vecteurs sont donc des formes linéaires, définies sur l'espace des formes linéaires sur E. Une première conséquence immédiate de cette définition :

Théorème 2.29 Tout espace vectoriel de dimension finie E est isomorphe à son bidual E''.

Preuve.
En effet, E' est isomorphe à E par la propriété 2.26 ; si nous appliquons la même propriété à E' plutôt qu'à E, nous obtenons que E'' est isomorphe à E'. En combinant les deux isomorphismes, nous obtenons la thèse. □

Dans le paragraphe qui suit, nous allons préciser l'isomorphisme qui les lie et lui donner une forme explicite. Commençons par la construction d'une correspondance entre E et E''.

Théorème 2.30 Soit E est un espace vectoriel de dimension finie ; à tout vecteur x de E, on peut faire correspondre un élément z_x défini par la relation $z_x(y) = y(x)$ pour tout y dans E'. Cet élément z_x appartient alors au bidual de E.

Preuve.
Si nous supposons que x est fixé, nous voyons que la fonction z_x, définie sur E', qui associe à y la valeur $z_x(y) = [x, y]$, est bien à valeurs dans $\mathbb{K}$. Nous en concluons que z_x est bien une forme définie sur E'.
Les lois introduites sur le dual pour en faire un espace vectoriel (définies en (2.5) et (2.6)), montrent de plus que z_x est linéaire. En effet, $\forall y_1, y_2 \in E', \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} z_x(\alpha y_1 + \beta y_2) &= (\alpha y_1 + \beta y_2)(x) \\ &= \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \\ &= \alpha z_x(y_1) + \beta z_x(y_2) \end{aligned}$$

En résumé, la relation $z_x(y) = [x, y]$ définit une forme linéaire sur E', càd que z_x est bien un élément de E''.□

Le raisonnement ci-dessus montre que les $z_x(\cdot) = [x, \cdot]$ sont des vecteurs de E''. Nous ne savons

47

Thm 2.31 : Théorème de réflexivité :

Mq $\forall z \in E'', \exists!\, x \in E : z(y) = y(x) \quad \forall y \in E'$ ⟶ ISOMORPHISME NATUREL

$$\Leftrightarrow \quad [y, z]_{E' \times E''} = [x, y]_{E \times E'}$$

En fait, le thm 2.30 montrait que le $z_x(\cdot) = [x, \cdot]$ est un élém^t du bidual.

⟶ Le thm de réflexivité montre qu'il $\exists$ cette sorte là comme élém^t du bidual et qu'elle peut s'appliquer à chaque fois ⟶ c-à-d que pr tous les z on peut trouver un x tel qu'on a cette relat°.

Ce thm ns montre aussi que cette correspondance entre le primal et le bidual est linéaire et bijective.

On pt considérer :

$\cdot\ E \xrightarrow{T} E''$

$x \leadsto z_x = [x, \cdot]$

$z_x(y) = [x, y] = y(x)$.

Mq ils sont isomorphes c-à-d qu'il $\exists$ une bijection linéaire
$\Leftrightarrow$
On se demande si $T(E) = E$
[c-à-d si on pt faire ça pr tous les z]

Linéarité grâce à la lin. de le dual :

(N.B. normalem^t : $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$
ici (via T) ⟶ $z_{\alpha x + \beta y} = [\alpha x + \beta y, \cdot]$)

$$\leadsto \forall y \in E' : z_{\alpha x_1 + \beta x_2}(y) = [\alpha x_1 + \beta x_2, y] \underset{\text{lin de } y}{=} \alpha [x_1, y] + \beta [x_2, y] = \alpha z_{x_1}(y) + \beta z_{x_2}(y)$$

$$\Rightarrow z_{\alpha x_1 + \beta x_2}(y) = \alpha z_{x_1}(y) + \beta z_{x_2}(y)$$

injective : (déf : $\forall x, y \in E \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$)
ou $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

On voudrait que $z_{x_1} = z_{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

hyp : $\forall y \in E' : z_{x_1}(y) = z_{x_2}(y) \underset{\text{relat°}}{\equiv} y(x_1) = y(x_2)$

$$\Rightarrow y(x_1) - y(x_2) = 0 \quad \text{OR } y(x_1) - y(x_2) = y(x_1 - x_2)$$

OR une fonct° linéaire en l'origine sur le o du esp[illegible]

verso p 47

cependant pas si TOUS les vecteurs de E'' sont de cette forme. La proposition suivante (appelée le Théorème de Réflexivité) vient apporter une réponse simple à cette question.

Théorème 2.31 Soit E est un espace vectoriel de dimension finie.
Pour toute forme linéaire z sur E' (càd $\forall z \in E''$), il existe un vecteur unique x dans E ($\exists! x \in E$) tel que

$$z(y) = [y, z]_{E' \times E''} = [x, y]_{E \times E'} = y(x)$$

pour tout y dans E'. De plus la correspondance ainsi définie entre x et z est un isomorphisme.

Cette correspondance est appelée *l'isomorphisme naturel* entre E et E''. Elle nous dit que tous les éléments z du bidual sont construits à partir d'un x du primal (tous les z sont bien des z_x) et que la correspondance entre le primal et le bidual est linéaire et bijective.

Preuve.
Considérons la correspondance comme allant de E dans E'' : à chaque x de E, elle fait correspondre un vecteur z_x de E'' tel que $z_x(y) = y(x)$ pour tout y dans E'.

Cette correspondance est linéaire : en effet, grâce à la linéarité des éléments y du dual, nous pouvons écrire, pour tout $y \in E'$:

$$z_{\alpha x_1 + \beta x_2}(y) = [\alpha x_1 + \beta x_2, y] = \alpha[x_1, y] + \beta[x_2, y] = \alpha z_{x_1}(y) + \beta z_{x_2}(y),$$

et donc

$$z_{\alpha x_1 + \beta x_2} = \alpha z_{x_1} + \beta z_{x_2}$$

Cette correspondance est injective : en effet, nous voulons démontrer que $z_{x_1} = z_{x_2}$ implique $x_1 = x_2$, avec x_1 et x_2 dans E. Mais dire que $z_{x_1} = z_{x_2}$, c'est dire que $z_{x_1}(y) = z_{x_2}(y)$ pour tout y de E', ou encore, comme $z_{x_1}(y) = y(x_1)$ et $z_{x_2}(y) = y(x_2)$,

$$y(x_1) - y(x_2) = y(x_1 - x_2) = 0 \quad \forall y \in E'.$$

La remarque qui suit le théorème 2.27 montre alors que $x_1 - x_2 = 0$ ou encore que $x_1 = x_2$. La correspondance est donc injective.

La correspondance est surjective : en effet, on vérifie facilement que l'ensemble des z_x de E'' forment un sous-espace de E''. De plus, ce sous-espace est isomorphe à E car la correspondance considérée plus haut est bijective si l'on restreint son ensemble d'arrivée à ce sous-espace et préserve bien les relations linéaires. Ce sous-espace est donc de dimension n, puisque E l'est. Or E'' est isomorphe à E et est donc aussi de dimension n. Le sous espace de E'' et E'' ont même dimension, ils ne peuvent qu'être identiques et la correspondance entre E et E'' est bijective. C'est donc bien un isomorphisme. □

Une remarque sur cet isomorphisme : si nous partons d'une base X du primal, que nous calculons sa base duale Y, ensuite la base duale de Y, notée Z, nous obtenons donc une base

48

$\Rightarrow x_1 = x_2$

Surjectivité :

On a dit $E \xrightarrow{T} T(E)$ $\quad \Rightarrow T(E)$ est un ss-espace de E''

$x \mapsto z_x = [x, \cdot]$

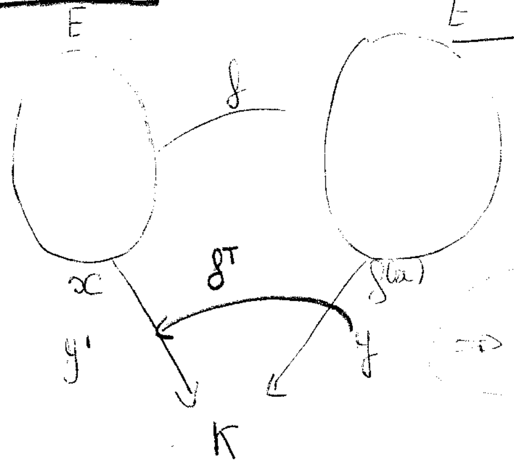
OR, $T(E)$ est isomorphe à E car si on [illegible] pour l'ensemble d'arrivée, cet ensemble est bijectif. En effet, $T(E)$ est la partie atteinte donc, surjectivité ! ($\exists$ au moins un y).

$\Rightarrow T(E) \equiv E \Rightarrow \dim(T(E)) = \dim E$ OR, $\dim E = \dim E''$

$\Rightarrow \dim(T(E)) = \dim E'' \Rightarrow T(E) = E''$

TRANSPOSÉES

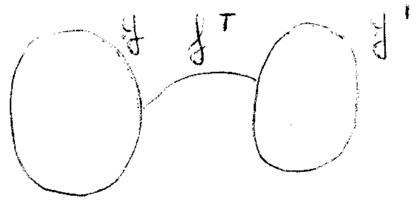
E $\Rightarrow$ la forme est validée pour tous les z.



$\Rightarrow y(f(x)) = y'(x)$

Donc $f^T(y) = y'$

On peut passer de y à y'.



- f^T est bien une transformation linéaire :
  - $\boxed{f^T : E' \to E'}$ $\mapsto$ transfo
  - linéaire : Si $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$

$\Rightarrow [x, f^T(y)] = [f(x), y] = [f(x), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2]$

car lin. $= \alpha_1 [f(x), y_1] + \alpha_2 [f(x), y_2]$

déf. $= \alpha_1 [x, f^T(y_1)] + \alpha_2 [x, f^T(y_2)]$

$= [x, \alpha_1 f^T(y_1) + \alpha_2 f^T(y_2)]$

voir p. 48

du bidual. Par l'isomorphisme décrit ci-dessus, les vecteurs de cette base Z sont envoyés sur des vecteurs du primal ; il est facile de vérifier que ces vecteurs du primal sont ceux de la base X.

Nous ne poursuivrons pas les développements théoriques à propos de la dualité plus loin. Il est cependant à noter que le dernier résultat que nous avons obtenu, à savoir que le bidual d'un espace vectoriel de dimension finie est naturellement isomorphe à l'espace lui-même, est une propriété fondamentale de beaucoup de secteurs des mathématiques.

→ travailler avec le primal revient à travailler dans le bidual. On a stoppé au bidual mais on aurait pu continuer

2.6 Transformations linéaires et transposées

Nous étudions, dans ce paragraphe, les relations entre la notion de transformation linéaire sur un espace vectoriel et l'espace vectoriel dual. Pour cela, choisissons un espace vectoriel E et y un vecteur quelconque de son dual E'. Nous définissons alors la forme linéaire

$$y'(x) = [f(x), y]$$

pour tout x dans E et pour une transformation linéaire f donnée. Nous pouvons alors noter

$$[f(x), y] = [x, y']$$

par définition de la notation $[\cdot, \cdot]$, puisque y composée avec f est bien une forme linéaire sur E. Si nous faisons maintenant varier y dans E', l'équation ci-dessus fait donc correspondre à chaque nouvel y un vecteur y' de E'. Notons, pour le moment abusivement,

$$y' = f^T(y).$$

Cette notation est abusive car elle implique que la transformation sur E' qui, à chaque y, fait correspondre un y' est une transformation linéaire. Si c'est le cas, rappelons que les équations ci-dessus impliquent alors que

$$\forall x \in E \; \forall y \in E' \; [f(x), y] = [x, f^T(y)]. \tag{2.12}$$

Nous démontrons facilement que cette transformation f^T sur E' est effectivement une transformation linéaire. En effet, si

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2,$$

alors

$$\begin{aligned} [x, f^T(y)] = [f(x), y] &= [f(x), \alpha y_1 + \beta y_2] \\ &= \alpha_1 [f(x), y_1] + \alpha_2 [f(x), y_2] \\ &= \alpha_1 [x, f^T(y_1)] + \alpha_2 [x, f^T(y_2)] \\ &= [x, \alpha_1 f^T(y_1) + \alpha_2 f^T(y_2)]. \end{aligned}$$

→ Donc $\forall x \in E$ $f^T(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha f^T(y_1) + \beta f^T(y_2)$

Définition 40 *Si f est une transformation linéaire sur E, la transformation linéaire sur E' caractérisée par l'équation (2.12) est appelée transformation transposée de f et notée f^T.*

Thm 2.32

Mq si f et g sont 2 transfo lin :

$$(fg)^T = g^T f^T$$

On sait que $[f(x), y] = [x, f^T(y)]$

Dc, ici : $[f(g(x)), y] = [g(x), f^T(y)] = [x, g^T(f^T(y))] = g^T f^T$

car il change de côté

⚠ $f^{TT} \neq f$ car $f^{TT} : E'' \to E''$
$f : E \to E$

Thm 2.33

Rappels :

$\begin{cases} f : E \to E \\ f^T \; E' \to E' \end{cases}$

Thèse : Mq $[f^T]_{X'}^{X'} = \left([f]_X^X\right)^T$

$\equiv$

$[f^T]_{ij} = [f]_{ji}$

Thm 2.28 :

$a_{ij} = [f(x_j), y_i]$ → base duale de X

base primale de X

$[f^T]_{ij}$ → Puisque $a_{ij} = [f(x_j), y_i]$ avec A correspondant à $f : E \to E$

(matrice)

$\in E$ $\in E'$

et que $f^T : E' \to E'$ → $b_{ij} = [f^T(y_j), z_i] = [f^T]_{ij}$

(on remonte à l'ordre sup).

Dc, $[f^T]_{ij} \underset{\text{thm 2.28}}{=} [f^T(y_j), z_i]$

- De plus, par la déf de f^T : $[x, f^T(y)] = [f(x), y]$

→ ici : $f = f^T$
$y = z_i$
$x = y_j$

(verso p. 19) ⇒ $[f^T(y_j), z_i] = [y_j, f^{TT}(z_i)]$

Nous donnons maintenant quelques propriétés des transformations transposées.

Théorème 2.32 Si f et g sont deux transformations linéaires sur un espace vectoriel E de dimension finie, alors

$$0_E^T = 0_{E'}, \tag{2.13}$$

$$id_E^T = id_{E'}, \tag{2.14}$$

$$(f+g)^T = f^T + g^T, \tag{2.15}$$

$$(\alpha f)^T = \alpha f^T, \tag{2.16}$$

$$(fg)^T = g^T f^T, \tag{2.17}$$

Preuve.

La preuve des relations (2.13)-(2.16) est facile et laissée en exercice. Prouvons seulement la relation (2.17). Nous observons que

$$[(fg)(x), y] = [gx, f^T(y)] = [x, g^T(f^T(y))],$$

pour tout x de E et tout y de E', ce qui prouve la propriété.□

Essayons également de caractériser $(f^T)^T$. On ne peut pas conclure que $(f^T)^T = f$; en effet, f est une transformation linéaire sur E tandis que $(f^T)^T$ est une transformation linéaire sur E''. Cependant il y a isomorphisme entre les deux espaces et le théorème de réflexivité implique que, pour tout x dans E et tout y dans E',

$$[f(x), y]_{E\times E'} = [x, f^T(y)]_{E\times E'} = [f^T(y), z_x]_{E'\times E''} = [y, (f^T)^T(z_x)]_{E'\times E''} \tag{2.18}$$

où z_x est le représentant de x dans E''. Ces deux transformations ont donc un même effet, dans le crochet de dualité, sur une forme linéaire quelconque y.

Nous terminerons ce paragraphe sur les transformations transposées par une discussion des matrices qui leur sont associées.

Théorème 2.33 Soit f une transformation linéaire sur E, un espace vectoriel de dimension n, alors

$$[f^T]_{ij} = [f]_{ji} = [f]^T_{ij}$$

où la matrice de la transformation f est relative à une base X et celle de f^T est relative à la base duale de X, soit X' (ce qui peut s'écrire $[f^T]_{X'}^{X'} = ([f]_X^X)^T$).

Preuve.

La démonstration de cette proposition est évidente : il suffit d'appliquer la proposition 2.28 dans

~~• $[y_j, (f^T)^T(z_i)] = [y_j, f(z_i)]$ car $f^{TT} = f$~~

~~• $[y_j, f(z_i)] = [f(x_i), y_j]$ par le thm de reflexivité.~~

~~• $[f(x_j), y_j] = [f]_{j,i}$ par déf de $a_{ij} = [f(x_j), y_i]$.~~

$\leadsto [f^T]_{ij} = [y_j, f^{TT}(z_i)] = [y_j, f(z_i)]$ car ici, on utilise le thm de reflexivité! $\rightarrow$ grâce à lui, on peut identifier naturellem^t (sans passer par une base) d'un élém^t du primal à un élément du bidual. Et donc, on pt considérer que $E'' \simeq E$

dc • $[y_j, f(z_i)] = [f(x_i), y_j]$ par le thm de reflexivité

$[f(x_i), y_j] = [f]_{j,i}$ par déf de $a_{ij} = [f(x_j), y_i]$.

E' et de se rappeler que l'on peut identifier E et E''. Nous avons, en utilisant ((2.18)), que

$$[f^T]_{ij} = [f^T(y_j), z_i]_{E'\times E''} = [y_j, (f^T)^T(z_i)]_{E'\times E''} = [f(x_i), y_j]_{E\times E'} = [f]_{ji}.$$

où le vecteur z_i est le représentant de x_i dans E''. Les $\{z_i\}_{i=1}^n$ forment évidemment une base du bidual grâce à l'isomorphisme naturel qui les relie à la base X du primal. □

La matrice de f^T est donc bien la transposée de la matrice de A, au sens des matrices, càd la matrice obtenue en remplaçant les lignes de la matrice initiale par ses colonnes. Pour cette raison, la transformation f^T est appelée la transformation transposée de f.

51

Annexe 6. Composantes de l'enquête sur la dualité

Cette annexe comporte trois parties :

1. le formulaire ayant servi de base pour les interviews individuelles semi-structurées qui a permis d'éclairer, pour seize étudiants, les réponses au questionnaire « débutants » (voir chapitre 4, § 2.1).
2. l'énoncé du travail de groupe proposé aux étudiants de mathématiques ayant répondu au questionnaire « débutants » (voir chapitre 4, § 2.2).
3. le questionnaire à destination des étudiants de Master, appelé *questionnaire « master »* (voir chapitre 4, § 2.3).

1. Formulaire pour l'interview semi-structurée suivant le questionnaire « débutants » (mai 2008)

Questionnaire complémentaire proposé lors de l'interview d'étudiants ayant répondu au questionnaire « débutants » (mai 2008)

1. Voulez-vous inscrire une signification particulière lorsque vous écrivez un vecteur en colonne plutôt qu'en ligne? Y a-t-il des indications pour utiliser l'une ou l'autre notation?

2. Combien de relations (plus précisément combien d'égalités) ai-je lorsque j'écris :
   $y_i(x_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1,\ldots,n$

3. Avez-vous remarqué qu'il était fait mention de la base duale dans la question où il était demandé de trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base non canonique ?
   Si oui :
   1. Quelle a été votre réflexion ?
   2. Vous êtes-vous demandé comment elle pouvait intervenir ?
   3. Pensez-vous maintenant que l'on peut se servir de la base duale pour répondre à la question ?
   4. Si vous avez changé d'avis, quelle en a été la cause ?

4. Concernant vos réponses au questionnaire : cfr questionnaire personnel

5. Voyez-vous un rapport entre la matrice transposée et l'application transposée ?

6. Voyez-vous un lien entre l'application transposée et des résultats du type : on peut passer des lignes aux colonnes (par exemple pour le calcul du déterminant, du rang d'une matrice,…)

7. Le travail de groupe a-t-il changé les réponses que vous apporteriez au questionnaire ?
   A-t-il changé vos conceptions sur la dualité ?
   Pourquoi (le fait de travailler la matière seul ? en groupe ? avec l'assistant au TG ? en classe de TD ?)

2. Enoncé du travail de groupe proposé aux étudiants ayant répondu au questionnaire « débutants » (mars 2008)

1$^{\text{ère}}$ BAC Mathématique Février-Mars 2008

Travail de groupe d'ALGEBRE

La dualité

M. De Vleeschouwer Ph. Toint

Quelques consignes…

- Les réponses aux questions doivent faire l'objet d'un rapport commun par groupe, clairement rédigé.
- Le travail est distribué le mardi 12 février 2008 ; il doit être remis avant le vendredi 14 mars 2008 à 14h.
- Chaque groupe doit consulter Martine De Vleeschouwer au minimum une fois entre le 15 février et le 22 février inclus (une feuille sera affichée sur la porte de son bureau (201 F) pour prendre rendez-vous).
  La semaine du 3 au 7 mars sera réservée à d'éventuelles consultations complémentaires.
- Après la remise du travail, une consultation obligatoire sera prévue la semaine du 17 mars afin d'évaluer la compréhension de chaque membre du groupe. Il sera donc demandé de prendre rendez-vous lors de la remise du rapport.
- Les travaux seront rendus aux étudiants avec une note indicative globale le jeudi 27 mars, le soin et l'orthographe interviendront dans cette note. L'originalité des exemples ou illustrations présentées dans le travail sera également prise en compte.
- Les connaissances acquises par ce travail font partie de la matière à connaître pour les examens de première et seconde sessions.

Des références

Pour ce travail, nous vous suggérons de consulter :

- Ph.L.Toint : « Algèbre » (syllabus pour les premiers baccalauréats en Sciences Mathématiques et Physiques, édité par la Librairie des Sciences 2007-2008).
- P.R.Halmos : « Finite-dimensional Vector Spaces », Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New-York 1974.

N'hésitez pas à utiliser d'autres références que celles proposées.

Présentation du travail

Pour répondre aux questions ci-dessous, vous pouvez utiliser, à votre meilleure convenance, le langage mathématique formel, la langue française, des graphiques ou dessins, …

1. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, construit sur le champ des réels.
   a. Donner un exemple de forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^4$.

b. Donner l'expression générale d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^4$.

c. Soient $x_1 = (1,2,0,4)$, $x_2 = (2,0,-1,2)$, $x_3 = (1,0,0,-1)$, $x_4 = (2,0,0,3)$; soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. L'ensemble X constitue-t-il une base de $\mathbb{R}^4$? Si oui, déterminez-en la base duale.

d. Si l'ensemble $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ défini ci-dessus est une base et que vous avez pu en calculer la base duale, quelles seraient les coordonnées du vecteur $(15,8,10,5)$ dans la base X ? Explicitez votre démarche.

e. Soit la transformation linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ telle que
$f(x,y,z,t) = (2x-t, 2y-z, x-y-t, -3z)$.
Comment en définiriez-vous la transformation transposée ?

2. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2x2}$, l'espace vectoriel des matrices 2 lignes, 2 colonnes, à coefficients réels, construit sur le champ des réels.

a. Donner un exemple de forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_{2x2}$.

b. Donner l'expression générale d'une forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_{2x2}$.

c. Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;
soit $X = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$. L'ensemble X constitue-t-il une base de $\mathcal{M}_{2x2}$? Si oui, déterminez-en la base duale.

d. Si l'ensemble $X = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ défini ci-dessus est une base et que vous avez pu en calculer la base duale, quelles seraient les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$ dans la base X ? Explicitez votre démarche.

e. Soit la transformation linéaire $f : \mathcal{M}_{2x2} \to \mathcal{M}_{2x2}$ telle que $f\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-d & a-b-d \\ 2b-c & -3c \end{pmatrix}$.
Comment en définiriez-vous la transformation transposée ?

3. A votre avis, y a-t-il un lien entre les questions 1. et 2. ci-dessus ? Si oui, lequel ?
Détaillez votre réponse.

4. Considérons un espace vectoriel *E* de dimension finie construit sur le champ *K*. Si vous deviez vous adresser à un étudiant n'ayant que des notions élémentaires en algèbre linéaire,

a. Comment définiriez-vous une forme linéaire sur *E* ?

b. Comment définiriez-vous le dual de *E* ?

c. Comment feriez-vous pour donner l'expression générale d'une forme linéaire sur *E* ?

d. Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ une base de *E*. Comment définiriez-vous une base duale de *X* ? Peut-il y en avoir plusieurs ?

e. Si l'on dispose d'une base *X* de *E* et de la base duale dans *E'*, comment feriez-vous pour calculer les coordonnées d'un vecteur de *E* dans la base *X* ? Explicitez votre démarche.

f. Soit *f* une transformation linéaire définie sur *E*. Comment définiriez-vous la transformation transposée f^t ? Pourriez-vous expliquer, sous forme de schéma ou autrement ce que représente la transformation transposée ?

g. Peut-on affirmer que $(f^t)^t = f$? Si non pourquoi ? Si oui, qu'est-ce qui vous permet de l'affirmer ?
h. Soit $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_p\}$ un ensemble de vecteurs de E.
Considérons l'ensemble F défini par :
$F = \{ f : E \to K \text{ telle que } (f \text{ linéaire}) \text{ et } (\forall s_i \in S : f(s_i) = 0)\}$
On montre aisément que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel. Mais de quel espace vectoriel est-il sous-espace ? Essayer de détailler le raisonnement que vous suivez pour répondre à cette question.

5. A quoi, selon vous, peut servir le dual ? Dans quelles circonstances intervient-il ?

6. Choisissez 3 exemples d'espaces vectoriels, différents de ceux qui sont présentés dans les énoncés ci-dessus.
Pour chacun d'eux, donnez un exemple de forme linéaire définie sur ces espaces et un exemple d'application qui ne soit pas une forme linéaire en expliquant chaque fois pourquoi.

7. Construisez un énoncé semblable[16] à celui de la question 2. pour un espace vectoriel que vous choisirez différent de ceux déjà présentés ou produits lors des énoncés ci-dessus.
Résolvez ensuite l'énoncé ainsi construit.

BON TRAVAIL !

[16] Par énoncé semblable, on entend un énoncé reprenant le même type de questions.

3. Questionnaire proposé aux étudiants de Master 1 et 2 en mathématique (mars 2009)

NOM : ……………………………….. Mars 2009

Prénom : ………………………………

Master 1 / Master 2 Mathématique

Questionnaire à destination des étudiants de première et deuxième Master en mathématique

1. Un élève de 1ère année n'a pas bien compris les notions reprises dans le tableau ci-dessous. Pour chacune de ces notions, pourriez-vous :
   a. situer le contexte ou le cours où ces notions ont été rencontrées et/ou utilisées ?
   b. écrire ce que vous diriez au jeune étudiant pour qu'il puisse comprendre ces notions ?

Notions	**Contexte ou cours** où la notion a été rencontrée et/ou utilisée	Comment expliqueriez-vous la notion au jeune étudiant ?
Base		
Forme linéaire		
Dual		
Base duale		

2. Aviez-vous déjà rencontré la notion de matrice transposée dans l'enseignement secondaire ? Si oui, vous rappelez-vous dans quel contexte ?

3. Un élève de 1ère année vient vous voir en disant qu'il n'a pas bien compris le lien entre *application transposée* et *matrice transposée*. Que lui répondriez-vous ?

4. A quoi, selon vous, peut servir une application transposée ? Dans quelles circonstances intervient-elle ?

5. Comment définiriez-vous le dual de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$?

6. Donnez, si possible, (1) une base de $\mathbb{R}^4$, (2) une base de son dual, (3) une application linéaire définie sur $\mathbb{R}^4$ et (4) la transposée de cette application.
   Si cela ne vous est pas possible, pourriez-vous expliquer pourquoi ?

7. Dans un espace de votre choix (qui ne soit cependant pas de type $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$), donner une base et sa base duale, une application linéaire (définie sur l'espace que vous avez choisi) et sa transposée.
   S'il ne vous est pas possible de donner un de ces objets, pourriez-vous expliquer pourquoi ?

Annexe 7. Formulation de proposition pour l'introduction de l'application transposée

Nous présentons ici une proposition de situation d'introduction de l'application transposée dans différents cadres (Douady 1986) et registres (Duval 1995).

Comme suggéré au chapitre 5, § 1.2.f), on suppose que le cadre matriciel a été utilisé, dans un premier temps, pour susciter la curiosité intellectuelle des étudiants (Harel 2000) et pour installer une dialectique ancien-nouveau (Assude & Gelis 2002). Pour rappel, il s'agit de se demander, une fois des bases *A* et *B* fixées respectivement dans un espace vectoriel *E* et *F*, quel est le rapport existant entre une application linéaire *f* allant de *E* vers *F*, représentée par la matrice M ($M = [f]_A^B$), et l'application linéaire *g* (qui n'est autre que f^t …) représentée par la transposée de la matrice *M* (qui ne diffère que par la forme de la matrice *M* !).

Nous nous tournons donc ensuite vers le cadre des systèmes d'équations linéaires qui introduira le cadre formel.

Nous présentons le cas particulier d'une transformation linéaire de $\mathbb{R}^4$ (application linéaire de $\mathbb{R}^4$ vers lui-même). Nous préférons choisir un nombre d'équations différent de la dimension de l'espace vectoriel considéré ($\mathbb{R}^4$), afin d'éviter un amalgame malheureux entre ces deux nombres. Nous nous distançons donc de la référence historique qui considérait des systèmes carrés (comportant même nombre d'équations que d'inconnues). De plus, nous supposons que le lien entre un système d'équations linéaires et les formes linéaires a été présenté :

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \varphi_2(x) = 0 \\ \quad \dots \\ \varphi_m(x) = 0 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} x = (x_1, \dots, x_n) \\ \varphi_i \in (\mathbb{R}^n)' \;,\; 1 \le i \le m \end{array}}$$

Figure 7.I : Relation entre système d'équations linéaires et formes linéaires

Prenons le cas particulier du système de trois équations linéaires à quatre inconnues donné à la Figure 7.II :

$$\boxed{\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 7 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 5 \end{cases}}$$

Figure 7.II : Ecriture explicite d'un système d'équations linéaires

Nous savons que nous pouvons l'écrire sous la forme (voir Figure 7.I) :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 7 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(x) = 7 \\ \varphi_2(x) = 10 \\ \varphi_3(x) = 5 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \varphi_i \in (\mathbb{R}^4)' \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \end{array}$$

où $\forall(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$: $\begin{aligned}\varphi_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= 2x_1+3x_2-5x_3+4x_4\\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= -x_1+x_2+2x_3+x_4\\ \varphi_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1-x_2-4x_3-x_4\end{aligned}$

Considérons aussi une transformation linéaire *f*, transformant $\mathbb{R}^4$ en lui-même ; par exemple *f* telle que $(x_1,x_2,x_3,x_4)\mapsto f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(2x_1-x_4,2x_2-x_3,x_1-x_2-x_4,-3x_3)$.

Si maintenant, à la place de considérer $\varphi_i(x)$, nous considérons $\varphi_i(f(x))$, nous obtenons un autre système d'équations linéaires auquel nous allons maintenant nous intéresser :

$$\begin{cases}\varphi_1(f(x))=7 & \text{où} \quad \varphi_i\in(\mathbb{R}^4)'\\ \varphi_2(f(x))=10 & \qquad x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\\ \varphi_3(f(x))=5 & \qquad f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4\end{cases}$$

Figure 7.III : Système linéaire considéré dans notre développement

Si nous souhaitons écrire de manière explicite ce système d'équations linéaires, nous pouvons bien entendu évaluer chaque φ_i en $f(x)$, pour tout $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$, et ensuite réécrire les expressions obtenues en mettant en évidence chaque composante de *x*. Ainsi, pour obtenir $\varphi_1(f(x))$, nous devrions effectuer les opérations suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi_1(f(x_1,x_2,x_3,x_4)) &= \varphi_1(2x_1-x_4,2x_2-x_3,x_1-x_2-x_4,-3x_3)\\ &= 2(2x_1-x_4)+3(2x_2-x_3)-5(x_1-x_2-x_4)+4(-3x_3)\\ &= (4-5)x_1+(6+5)x_2+(-3-12)x_3+(-2+5)x_4\\ &= -x_1+11x_2-15x_3+3x_4\end{aligned}$$

Figure 7.IV : Calcul de $\varphi_1(f(x))$ en tant que composition de fonctions

L'opération que nous venons de faire se représente schématiquement par la situation suivante :

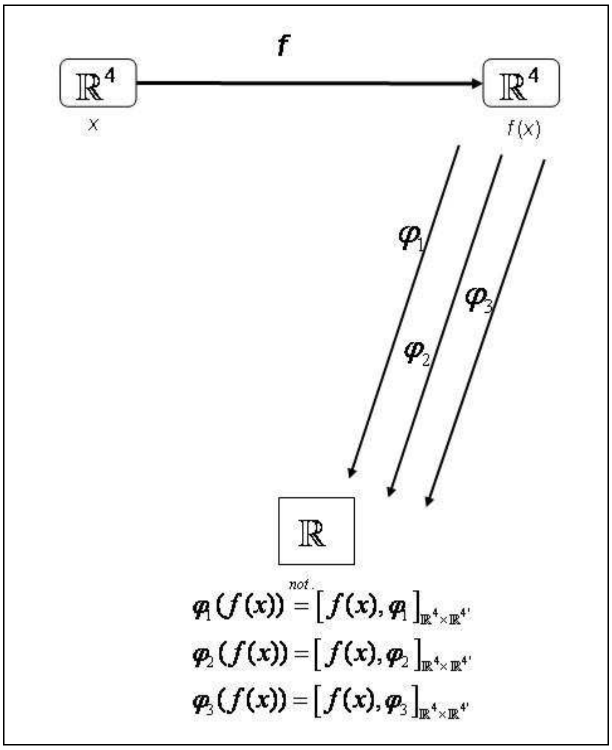


Figure 7.V : Représentation schématique de la composition de *f* et φ_i

Et qui, analytiquement, se conçoit comme la composition de deux applications linéaires, même si elles sont de natures différentes : une transformation linéaire et une forme linéaire : $\varphi_i \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. On montre facilement que la composition de deux applications linéaires est une application linéaire. Comme $\varphi_i \circ f$ va de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$, il s'agit d'une forme linéaire, que nous pouvons noter $\varphi_{i,f}$ en raison de l'influence de *f* (pour une transformation linéaire *f* donnée, à toute forme linéaire φ_i est associée une forme linéaire $\varphi_{i,f}$ particulière). On peut donc compléter la Figure 7.V de façon à obtenir le schéma suivant :

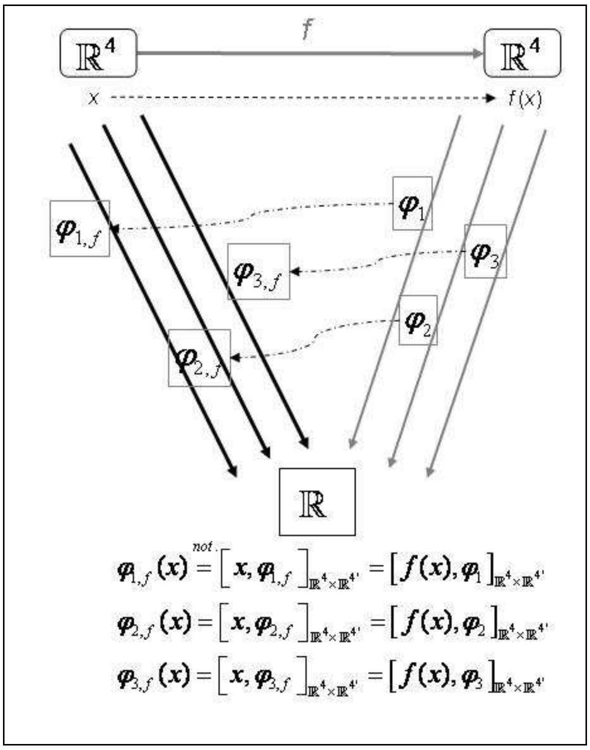


Figure 7.VI : Introduction des formes linéaires $\varphi_{i,f}$

Replaçons-nous maintenant dans le cadre des systèmes d'équations linéaires. On conçoit alors qu'à la place de calculer $\varphi_i(f(x_1, x_2, x_3, x_4))$ comme étant la composition de φ_i et f (voir Figure 7.IV), on se propose de calculer $\varphi_{i,f}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ qui lui est équivalent (voir Figure 7.VI). C'est-à-dire que l'on propose de transformer directement la forme linéaire φ_i de manière à obtenir la forme linéaire $\varphi_{i,f}$. Autrement dit, on se propose de transformer directement le membre de gauche intervenant dans l'équation *i* du système linéaire initialement considéré (Figure 7.II). On considère donc une transformation du dual de $\mathbb{R}^4$, que nous nommons f^t, qui à chaque φ_i de $(\mathbb{R}^4)'$ associe $\varphi_{i,f}$. C'est ce que représente schématiquement la Figure 7.VII :

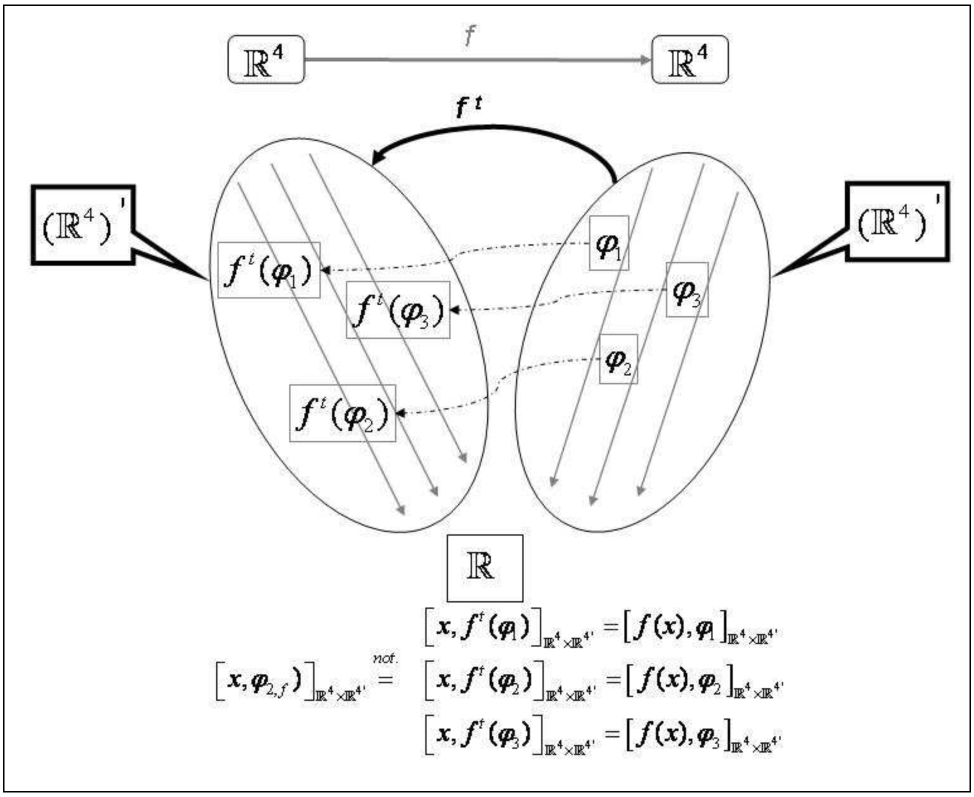


Figure 7.VII : Définition (sous forme de schéma) de l'application transposée de *f*

Il nous reste donc à définir analytiquement la transformation linéaire f^t :

$f^t : \mathbb{R}^{4\,'} \to \mathbb{R}^{4\,'}$ telle que $\forall \varphi_i \in \mathbb{R}^{4\,'} : \forall x \in \mathbb{R}^4 : \left[x, f^t(\varphi_i)\right]_{\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^{4\,'}} = \left[f(x), \varphi_i\right]_{\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^{4\,'}}$

où l'on peut détailler analytiquement chaque forme linéaire φ_i de $\mathbb{R}^{4\,'}$ par :

$$\varphi_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \text{ où } \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : [x, \varphi_i]_{\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^{4\,'}} = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 \qquad (3)$$

Si nous particularisons à la transformation f considérée dans notre raisonnement :

f telle que $\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : f(x) = (2x_1 - x_4, 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 - x_4, -3x_3)$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\left[x, f^t(\varphi_i)\right]_{\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^{4\,'}} &= \left[f(x), \varphi_i\right]_{\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^{4\,'}} \\
&= a(2x_1 - x_4) + b(2x_2 - x_3) + c(x_1 - x_2 - x_4) + d(-3x_3) \\
&= (2a + c)x_1 + (2b - c)x_2 + (-b - 3d)x_3 + (-a - c)x_4
\end{aligned}$$

où a, b, c, d sont définis dans (3).

Autrement dit, nous pouvons à présent obtenir le membre de gauche de chaque équation du système présenté à la Figure 7.III, $\varphi_i(f(x)) \overset{not.}{=} \left[f(x), \varphi_i\right]$, en calculant directement $\left[x, f^t(\varphi_i)\right] \overset{not.}{=} (f^t(\varphi_i))(x)$ qui lui est égal par définition de l'application transposée f^t. Dit encore autrement, à la place de transformer les x_i par l'application *f*, on transforme les équations par l'application f^t.

En particularisant à la première équation du système considéré (Figure 7.III), et en nous rappelant que $\forall x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : [x,\varphi_1]_{\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^{4\prime}} = 2x_1+3x_2-5x_3+4x_4$ on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(f(x_1,x_2,x_3,x_4)) &\overset{\text{déf. de } f^t}{=} (f^t(\varphi_1))(x_1,x_2,x_3,x_4)\\
&= (2.2+(-5))x_1+(2.3-(-5)x_2+(-3-3(4))x_3+(-2-(-5))x_4\\
&= -x_1+11x_2-15x_3+3x_4
\end{aligned}$$

Figure 7.VIII : Calcul de $\varphi_1(f(x))$ par la transposée de *f*

En comparant avec la première technique de calcul utilisée (voir Figure 7.IV), on se rend effectivement compte que ce sont directement les coefficients des membres de gauche des équations qui sont manipulés dans la dernière technique présentée, utilisant la transposée (Figure 7.VIII), et non plus les composantes de la variable *x* de $\mathbb{R}^4$.

Une fois la transposée d'une *transformation* linéaire ainsi introduite, on peut, si on le souhaite, facilement généraliser à la transposée d'une *application* linéaire (en ne considérant plus que le cadre formel, en registre analytique ou schématique).

On peut aussi reprendre la problématique proposée en introduction dans le cadre matriciel pour développer ensuite des propriétés concernant la transposée d'une application linéaire (matrice la représentant,…).

En introduisant la transposée de la sorte, nous nous sommes donc servie des cadres des matrices et des systèmes d'équations linéaires, pour les cadres contextualisés, et du cadre formel, abordé par les registres analytique et schématique. Nous pensons que la diversité des cadres et des registres est nécessaire à la compréhension du concept de transposée.

Annexe 8. Déroulement général des dispositifs mis en place à Namur en 2008-2009

En référence au chapitre 5, § 3.1, le Tableau 8.I présente un aperçu général du déroulement de l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année de mathématique ou de physique à l'université de Namur lors de l'année académique 2008-2009. Nous n'avons repris le détail que pour les mois d'octobre, novembre et début décembre car il s'agit de la période concernée par l'enseignement de la dualité. Une colonne est dédiée aux mathématiciens, et une autre aux physiciens. Lorsqu'une séance est commune aux deux sections, les colonnes sont regroupées en une seule dans le tableau. Les séances concernent soit des cours théoriques (« CTh » et en grisé foncé dans le tableau), des travaux dirigés (« TD » et en grisé moyen dans le tableau), ou des séances tremplin (« Tr » et en grisé clair dans le tableau). La durée des séances est également reprise entre parenthèses. Les séances spécifiquement concernées par l'enseignement de la dualité (en tant qu'objet) sont indiquées en gras dans le tableau.

Dates	Mathématiciens	Physiciens
Au 30 sept. 2008	CTh : Chap.1 -> Sous-espaces engendrés par un ensemble de vecteurs (Span)	
	TD : « Structures algébriques »	TD : « Structures algébriques »
Jeu 2 oct. 2008		Tr (2h) : correspondances et structures algébriques.
Ven 3 oct. 2008	Tr (1h) : lin. dépendant, lin. indépendant, combinaisons linéaires.	
Ven 3 oct. 2008	**Dispositif d'enseignement « Les espaces vectoriels » : distribution du travail de groupe.**	
Lun 6 oct. 2008	Tr (30min) : sous-espaces engendrés par un ensemble de vecteurs (Span)	
Mar 7 oct. 2008	CTh (1h30) : Fin Chap.1 + Chap.2 -> section 2.1 appl. Linéaires	
Mer 8 oct. 2008	Tr (1h) : mettre un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (donné avec des équations) sous forme de Span + illustration d'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$, ker f et Im f	
Lun 13 oct. 2008	TD (1h30) : Les sous-espaces vectoriels.	
Mar 14 oct. 2008		TD (1h) : dépendance linéaire et dimension. Début des sous-espaces vectoriels (pas encore les Spans)

<table>
<tr><th>Dates</th><th>Mathématiciens</th><th>Physiciens</th></tr>
<tr><td>Mer 15 oct. 2008</td><td>Tr (1h) : somme directe + démonstrations du thm 2.3 « Tout espace vectoriel de dim finie construit sur le champ K est isomorphe à K^n » et du thm. 2.6 « Le complémentaire du noyau d’une application linéaire f est isomorphe à l’image de f »</td><td>Tr (1h) : mettre un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (donné avec des équations) sous forme de Span +
Notion de ker f et Im f.</td></tr>
<tr><td>Ven 17 oct. 2008</td><td></td><td>Tr (1h) : calcul du noyau d’une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$. Explication de somme directe et d’isomorphisme + démonstration du thm 2.3</td></tr>
<tr><td>Lun 20 oct. 2008</td><td>TD (1h30) : fin des exercices sur sous-espaces vectoriels et dimension</td><td></td></tr>
<tr><td>Mar 21 oct. 2008</td><td colspan="2">CTh (1h30) : Chapitre2 (suite) : Transformations linéaires ; Matrices et transformations linéaires.</td></tr>
<tr><td>Mar 21 oct. 2008</td><td></td><td>TD (1h) : Sous-espaces vectoriels, Span et dimensions</td></tr>
<tr><td>Mer 22 oct. 2008</td><td></td><td>Tr (1h) : Dispositif d’enseignement « Applications », question 1.</td></tr>
<tr><td>Ven 24 oct. 2008</td><td>Tr (1h) : questions-réponses sur le chapitre 1.</td><td></td></tr>
<tr><td>Lun 27 oct. 2008</td><td>TD (1h30) : Applications linéaires (noyau, image, calcul de f^3) + rappels sur la construction des matrices.</td><td></td></tr>
<tr><td>Mar 28 oct. 2008</td><td colspan="2">CTh (1h30) : Chapitre2 (suite) : Applications linéaires et matrices rectangulaires ; Formes linéaires (espace dual, mais pas encore réflexivité).</td></tr>
<tr><td>Mar 28 oct. 2008</td><td></td><td>TD (1h) : fin des dimensions et sous-espaces vectoriels. A préparer par les étudiants : Ker et Image (sans avoir vu les rappels en TD).</td></tr>
<tr><td>Mer 29 oct. 2008</td><td colspan="2">Tr (1h) : Dispositif d’enseignement « Qu’est-ce qu’une matrice ? » + correction du test de Novembre 2007, Q3. 3 et 4 (à préparer par les étudiants).</td></tr>
<tr><td>Ven 31 oct. 2008</td><td colspan="2">Tr (25 min) : Correction du test de Novembre 2007, Q2.2 (les étudiants doivent travailler les questions avant de venir en séance).</td></tr>
<tr><td>Ven 31 oct. 2008</td><td></td><td>Tr (30 min) : Dispositif d’enseignement « Applications » : fin (questions 2, 3 et 4).</td></tr>
</table>

Dates	**Mathématiciens**	**Physiciens**
Lun 3 nov. 2008	TD (1h30) : suite des rappels sur les matrices (y compris changement de base) + ex. sur construction de matrice et calcul de $f(v)$ à partir de la matrice.	
Mar 4 nov. 2008		TD (1h supplémentaire) : Rappels sur appl. linéaires, surj., inj. Ker et Image + exercices sur Ker, Im f et f^2 + début de rappels sur la construction de matrices.
Mar 4 nov. 2008		TD (1h) : suite des rappels sur les matrices (y compris changement de base) + ex. sur construction de matrice et calcul de $f(v)$ à partir de la matrice.
Mer 5 nov. 2008		**Tr (1h) : Dispositif d'enseignement « Formes linéaires et dual » : activité sur les niveaux macro-micro pour introduire les formes linéaires et le dual.**
Ven 7 nov. 2008	**Tr (1h) : Dispositif d'enseignement « Formes linéaires et dual » : activité sur les niveaux macro-micro pour introduire les formes linéaires et le dual.**	
Semaine de tests (évaluation formative) pour les étudiants de première année		
Lun 17 nov. 2008	TD (1h30) : exercices sur les changements de base + ex: à partir d'une matrice, trouver la définition et les propriétés de f (inj., surj.,…)	
Mar 18 nov. 2008	**CTh (1h30) : Chapitre 2 suite : théorème de réflexivité ; transformations linéaires et transposées.** Chapitre 3 : Déterminants :3.1 : les permutations	
Mar 18 nov. 2008		TD (1h) : ex : matrices et changement de base + explication de l'ex : à partir d'une matrice, trouver la définition et les propriétés de f (inj., surj.,…)
Mer 19 nov. 2008	**Tr (1h) : Illustration « Primal, dual, bidual » : illustrations de ces notions (en prenant comme espaces vectoriels particuliers $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{P}_6$, $\mathcal{M}_{2x3}$)**	
Lun 24 nov. 2008	**TD (2h) :** fin du dernier ex. sur les matrices **+ rappels sur formes linéaires et dual ; bases duales et matrices : exercices de calcul de base duale et exercice théorique pour obtenir l'expression générale d'une forme linéaire (FL)**	

Dates	Mathématiciens	Physiciens
Mar 25 nov. 2008		**TD (1h) :** correction des exercices sur les matrices ; **rappels sur formes linéaires et dual ; expliquer comment calculer base duale. Ex : calcul d'une base duale + exercice théorique sur l'expression générale d'une forme linéaire (FL)**
Mer 26 nov. 2008	Pas de tremplin algèbre car correction des tests d'autres cours + séminaire de méthodologie sur l'organisation de l'étude et de la session d'examens.	
Lun 1 déc. 2008	**TD (2h) : ex. sur l'expression de $y(x)$ où les coord. de la FL y sont données (changement de base par rapport au dual) + Montrer qu'une forme linéaire appartient au bidual et trouver son correspondant dans le primal. Rappel sur la transposée + exercice de calcul de transposée par la définition (à faire à domicile : calcul f^t par la matrice) + ex : étant donnée une FL, montrer qu'elle appartient au dual, montrer que deux FL sont LI, calculer Span et Dim, vérifier des lois sur l'espace dual**	
Mardi 2 déc. 2008	CTh (1h30) : Chapitre 3 (suite) : suite de 3.1 + 3.2 : déterminants	
Mar 2 déc. 2008		**TD (1h) : ex. sur l'expression de $y(x)$ où les coord. de la FL y sont données (changement de base par rapport au dual) + montrer qu'une F.L. appartient au bidual et trouver son correspondant dans le primal. Rappel sur la transp.**
Mer 3 déc. 2008	Tr (1h) : correction du test de novembre (49 étudiants)	
Ven 5 déc. 2008		Tr (1h) : Explication du Thm « toute permutation est un produit de cycles disjoints 2 à 2 » + exercice complémentaire sur les changements de base.
Lun 8 déc. 2008	TD (1h30) : chap3 : rappels sur les déterminants. Exercices associés.	
Mar 9 déc. 2008	CTh (1h30) : Chapitre 3 (suite)	
Mar 9 déc. 2008		**TD (1h) : Rappels sur la transposée ; calcul de f^t de 2 façons** ; rappels sur les déterminants. **(Pour certains « volontaires » : 30 min. de + : ex. suppl. sur base duale, transp.)**

Tableau 8.I : Présentation générale du planning d'algèbre linéaire concerné par la dualité en 2008-2009

Annexe 9. Proposition d'illustration des notions d'espace vectoriel primal, dual, bidual

En référence au chapitre 5, nous présentons ici un enseignement qui a pour but d'*illustrer* la notion d'espace vectoriel primal, dual et bidual en utilisant un répertoire d'exemples des espaces vectoriels. Cette présentation a également pour but d'illustrer le théorème de réflexivité, en explicitant les objets intervenant dans celui-ci, et ce, dans différents cadres (Douady 1986).

Méthodologie

L'activité proposée ici a été mise en place dans le cadre de l'opération tremplin conjointement pour les étudiants de mathématique et physique. Une séance tremplin commune (une heure) pour les deux sections a été organisée à cette fin (19 novembre 2008 ; 9 décembre 2009). Pour cette activité, il est recommandé que la classe (ou auditoire) soit munie d'un grand tableau afin que ce dernier puisse être séparé en trois parties : une première partie consacrée à l'espace primal, une deuxième à l'espace dual et une troisième au bidual. Le fait de pouvoir afficher sur un seul tableau ces trois parties permettra d'illustrer plus aisément le théorème de réflexivité dans lequel intervient des éléments de ces trois espaces.

L'illustration que nous proposons prend place après que le dispositif « Formes linéaires et dual » ait été mis en œuvre. Les étudiants qui y participent ont déjà vu au cours théorique le premier chapitre sur les espaces vectoriels et le deuxième chapitre sur les applications, transformations et formes linéaires. Le chapitre 3 sur les déterminants avait déjà été abordé. Cependant, il n'y a pas encore eu de travaux dirigés concernant la dualité. Un répertoire minimum d'exemples d'espaces vectoriels est requis afin de pouvoir illustrer dans différents cadres les notions impliquées dans cette activité. La notation des crochets de dualité a été introduite.

Présentation et analyse a priori

Nous avons expliqué dans la méthodologie que le tableau de la salle de cours sera partagé en trois parties. Nous présentons à la fin de cette Annexe 9 une proposition de tableau qui peut résulter de l'activité « Primal, dual et bidual » que nous détaillons maintenant.

Dans un premier temps, nous proposons d'illustrer en parallèle la notion d'espace vectoriel primal, dual et bidual. Dans un deuxième temps, nous illustrerons, sur base de ce qui aura déjà été présenté, le théorème de réflexivité.

Illustration des notions de primal, dual et bidual

Un rappel des notions concernées par cet enseignement est d'abord présenté dans le cadre générique. Ainsi, au début de l'activité, le tableau de la salle de cours ressemble au tableau présenté à la Figure 9.I, où les notions de primal, dual et bidual ont été resituées.

Primal	Dual	Bidual
E : espace vectoriel, construit sur champ K, de dimension n	$E' = \{y : E \to K \text{ et } y \text{ linéaire}\}$ E' : espace vectoriel, construit sur champ K, de dimension n	$E'' = (E')' = \{z : E' \to K \text{ et } z \text{ linéaire}\}$ E'' : espace vectoriel, construit sur champ K, de dimension n

Figure 9.I : Présentation initiale du tableau dans l'illustration "Primal, dual, bidual"

Nous proposons ensuite de présenter les notions considérées dans au moins trois cadres contextualisés, c'est-à-dire différents du cadre générique, dont un seul cadre algébrique ($\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$) ou géométrique ($\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$). En effet, la variété des cadres est recommandée pour la compréhension d'une notion (Douady 1986), et il est important de montrer le caractère unificateur des notions d'algèbre linéaire sur une diversité d'espaces non habituellement considérés par les étudiants. Un cadre géométrique, plus familier aux étudiants ou un cadre algébrique, qui en constitue une première généralisation, permet d'exprimer les éléments des espaces vectoriels (« vecteurs ») sous forme de *n*-uplet, sans autre symbole supplémentaire que des parenthèses ou des virgules par rapport aux composantes. De plus, si on veut indicer ces éléments, un seul indice est suffisant (contrairement aux notations usuelles des matrices par exemple).

En octobre 2008, nous avions par exemple exhibé les espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{P}_6$ (espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré maximum 6, construit sur le corps des réels), et $\mathcal{M}_{2x3}$ (espace vectoriel des matrices réelles rectangulaires à 2 lignes et 3 colonnes), chaque fois construits sur le champ des réels.

Illustration de la notion d'espace vectoriel (primal)

On propose d'inscrire, sur des lignes séparées, ces trois espaces dans la colonne correspondant à l'espace vectoriel primal (première colonne) et pour chacun de ces espaces, de présenter un « vecteur » (c'est-à-dire un élément de l'espace *vectoriel*) générique et un ou deux « vecteurs » particuliers. Par exemple, pour $\mathcal{M}_{2x3}$, on présentera respectivement $x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ et $x_1 = \begin{pmatrix} -14 & -1 & 5 \\ \sqrt{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$ par exemple. En agissant de la sorte, les composantes des vecteurs sont mises en évidence, sous un aspect plus formel d'abord, et particulier (ou calculatoire) ensuite. Cette mise en évidence est importante : tout d'abord, afin de concrétiser plus avant le vecteur en question ; ensuite, afin de pouvoir expliciter (par après) des formes linéaires (éléments du dual) définies sur l'ensemble de ces vecteurs.

Illustration du dual

L'activité « Primal, dual et bidual » se poursuit ensuite : pour chacun des espaces vectoriels choisis, nous considérons maintenant son dual, en complétant maintenant la deuxième colonne du tableau. Comme cela a été fait pour l'espace primal, pour chacun des espaces duaux considérés, sont donnés un « vecteur » (c'est-à-dire ici une forme linéaire) générique et un « vecteur » (forme linéaire) particulier.

Ainsi par exemple une forme linéaire du dual de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2\text{x}3}$ pourra s'écrire de manière générique $y: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2\times 3} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(x) \overset{not.}{=} [x,y] = [x,y]_{\mathcal{M}_{2\times 3}\times(\mathcal{M}_{2\times 3})'} \end{array}$.

Et, en se rappelant que tout x de $\mathcal{M}_{2\text{x}3}$ peut s'écrire $x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, on peut spécifier davantage l'expression $y(x) \overset{not.}{=} [x,y]$: $[x,y] = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} + \alpha_4 a_{21} + \alpha_5 a_{22} + \alpha_6 a_{23}$.

Si maintenant nous souhaitons exhiber une forme linéaire particulière, que nous noterons y_1, nous devons particulariser l'expression de $y_1(x) \overset{not.}{=} [x,y_1]$, en donnant des valeurs spécifiques aux différents α_i. Par exemple, en prenant $\alpha_1 = -\frac{3}{7}$, $\alpha_2 = -7$, $\alpha_3 = \alpha_5 = 0$, $\alpha_4 = 8$, $\alpha_6 = -\sqrt{5}$, on obtient :

$$[x,y_1] = -\frac{3}{7}a_{11} - 7a_{12} + 8a_{21} - \sqrt{5}a_{23}, \text{ où } x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3} \quad \text{et} \quad y_1 \in (\mathcal{M}_{2\times 3})'.$$

Comme cela était le cas dans un espace primal, le fait de devoir donner une forme linéaire particulière d'un espace dual considéré permet de mettre en évidence les composantes différenciant les formes linéaires les unes des autres à l'intérieur d'un même espace dual. Cette mise en évidence est importante, pour les deux mêmes raisons citées lors de la présentation des espaces vectoriels primaux, à savoir concrétiser tout d'abord ce qu'est une forme linéaire, et pouvoir par la suite définir des formes linéaires sur cet ensemble de formes linéaires, lorsque l'on prendra en compte le bidual.

Pour mettre davantage en avant les différentes composantes des vecteurs considérés, on peut utiliser pour ces dernières une couleur spécifique à chaque espace (primal ou dual). Cette couleur serait propre à chaque colonne du tableau, c'est-à-dire qu'elle correspondrait aux différents types d'espaces considérés : primal, dual (et bidual pour la suite). Ainsi, par exemple la couleur bleue pourra être utilisée pour représenter les composantes des « vecteurs » du primal ; la couleur verte sera réservée pour écrire les composantes des vecteurs du dual ; la couleur rouge sera utilisée pour écrire les composantes des vecteurs du bidual, qui seront considérés par la suite.

Nous pouvons de plus considérer l'application de y_1 en un élément particulier de $\mathcal{M}_{2\text{x}3}$, par exemple x_1, déjà défini plus haut. Nous obtenons alors :

$$
\begin{aligned}
[x_1, y_1]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'} &= -\frac{3}{7}a_{11} \quad -7a_{12} \quad +8a_{21} \quad -\sqrt{5}a_{23} \\
&= -\frac{3}{7}(-14) \quad -7(-1) \quad +8\left(\frac{3}{2}\right) \quad -\sqrt{5}(0) \\
&= 6 \quad + \quad 7 \quad + \quad 12 \quad + 0 \\
&= 25 \\
&\in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

On vérifie ainsi concrètement que $[x_1, y_1]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'}$ appartient bien à $\mathbb{R}$. Ainsi en est-il aussi pour $[x, y]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'}$ où x est quelconque dans $\mathcal{M}_{2x3}$ et y quelconque dans $(\mathcal{M}_{2x3})'$. Cette constatation sera utilisée pour illustrer le théorème de réflexivité.

Illustration du bidual

Après avoir présenté le dual des espaces vectoriels considérés dans l'activité, nous poursuivons avec le dual du dual, c'est-à-dire le bidual. On se propose ainsi de compléter la troisième et dernière colonne du tableau d'une manière identique à celle appliquée pour les autres colonnes. Les notations étant plus lourdes à manipuler (une forme linéaire d'une forme linéaire implique plusieurs éléments différents), nous pouvons nous contenter du cadre géométrique ou algébrique et d'un autre cadre contextualisé. Nous présentons donc un élément générique, ainsi qu'un élément particulier du bidual de deux espaces vectoriels choisis.

En reprenant l'exemple de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2x3}$, nous définissons alors un élément générique z appartenant au bidual de $\mathcal{M}_{2x3}$ comme :

$$
\begin{aligned}
z: \quad (\mathcal{M}_{2\times3})' &\to \mathbb{R} \\
y &\mapsto z(y) \overset{not.}{=} [y, z] = [y, z]_{(\mathcal{M}_{2\times3})' \times (\mathcal{M}_{2\times3})''}
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Nous nous rappelons que tout y de $(\mathcal{M}_{2x3})'$ peut s'écrire :

$$
\begin{aligned}
y: \quad \mathcal{M}_{2\times3} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto y(x) \overset{not.}{=} [x, y] = [x, y]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'}
\end{aligned}
$$

où, en sachant que $x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, on avait pu spécifier davantage l'expression

$$
y(x) \overset{not.}{=} [x, y] \; : \; [x, y] = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} + \alpha_4 a_{21} + \alpha_5 a_{22} + \alpha_6 a_{23} \, .
$$

Nous sommes donc en mesure de préciser l'expression de $z(y) \overset{not.}{=} [y, z] \overset{not.}{=} [y, z]_{(\mathcal{M}_{2\times3})' \times (\mathcal{M}_{2\times3})''}$ dans (5). Nous obtenons alors :

$$
[y, z] = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 + \beta_4\alpha_4 + \beta_5\alpha_5 + \beta_6\alpha_6
$$

Si maintenant nous souhaitons donner un élément particulier du bidual (une forme linéaire), que nous noterons z_1 ($z_1 \in (\mathcal{M}_{2\times3})''$), nous devons particulariser l'expression de

$z_1(y) \overset{not.}{=} [y, z_1]$, pour tout $y \in (\mathcal{M}_{2\times 3})'$, en donnant des valeurs particulières aux scalaires β_i. En prenant par exemple $\beta_1 = 21$, $\beta_2 = 6$, $\beta_3 = -\frac{6}{5}$, $\beta_4 = -1$, $\beta_5 = 0$, $\beta_6 = 2\sqrt{5}$, on obtient :

$\forall y \in (\mathcal{M}_{2\times 3})'$: $[y, z_1]_{(\mathcal{M}_{2\times 3})' \times (\mathcal{M}_{2\times 3})''} = 21\alpha_1 + 6\alpha_2 - \frac{6}{5}\alpha_3 - \alpha_4 + 2\sqrt{5}\alpha_6$, où l'expression analytique complète d'une forme linéaire y a été donnée dans la deuxième colonne, dédiée au dual :

$$\begin{array}{rrcl} y: & \mathcal{M}_{2\times 3} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & [x, y]_{\mathcal{M}_{2\times 3} \times (\mathcal{M}_{2\times 3})'} = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} + \alpha_4 a_{21} + \alpha_5 a_{22} + \alpha_6 a_{23} \end{array}$$

$$\text{avec } x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons de plus considérer ici aussi l'application de z_1 en un élément particulier de $(\mathcal{M}_{2x3})'$, par exemple y_1 défini plus haut. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} [y_1, z_1]_{(\mathcal{M}_{2\times 3})' \times (\mathcal{M}_{2\times 3})''} &= 21\,\alpha_1 + 6\,\alpha_2 - \frac{6}{5}\,\alpha_3 - \alpha_4 + 2\sqrt{5}\,\alpha_6 \\ &= 21\left(-\frac{3}{7}\right) + 6(-7) - \frac{6}{5}(0) - (0) + 2\sqrt{5}\left(-\sqrt{5}\right) \\ &= -9 \quad -42 \quad -0 \quad -0 \quad -10 \\ &= -61 \\ &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On vérifie ainsi concrètement que $[y_1, z_1]_{(\mathcal{M}_{2\times 3})' \times (\mathcal{M}_{2\times 3})''}$ appartient bien à $\mathbb{R}$, tout comme c'était le cas de $[x_1, y_1]_{\mathcal{M}_{2\times 3} \times (\mathcal{M}_{2\times 3})'}$. Il en est de même pour $[y, z]_{(\mathcal{M}_{2\times 3})' \times (\mathcal{M}_{2\times 3})''}$ où y est quelconque dans $(\mathcal{M}_{2x3})'$ et z quelconque dans $(\mathcal{M}_{2x3})''$. Cela a donc un sens de comparer l'expression $[y, z]_{(\mathcal{M}_{2\times 3})' \times (\mathcal{M}_{2\times 3})''}$ à $[x, y]_{\mathcal{M}_{2\times 3} \times (\mathcal{M}_{2\times 3})'}$ car ces deux expressions représentent des réels (champ sur lequel a été construit l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_{2x3})'$).

Illustration du théorème de réflexivité

Les trois colonnes du tableau remplies selon la description ci-avant, il est alors plus facile d'illustrer le théorème de réflexivité, repris à la Figure 9.II.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour toute forme linéaire z définie sur E' (c'est-à-dire $\forall z \in E''$), il existe un vecteur unique x dans E ($\exists!\, x \in E$) tel que $\forall y \in E'$: $[x, y]_{E\times E'} = [y, z]_{E'\times E''}$. De plus, la correspondance ainsi définie entre x et z est un isomorphisme.

Figure 9.II : Théorème de réflexivité

En effet, en prenant par exemple l'élément z_1 du bidual de $\mathcal{M}_{2x3}$ déjà défini avant ($z_1 \in (\mathcal{M}_{2x3})''$), on peut se demander quel élément x_{z_1} lui correspond dans le primal

($x_{z_1} \in \mathcal{M}_{2x3}$) pour que, quelle que soit la forme linéaire y définie sur $\mathcal{M}_{2x3}$ ($\forall y \in \mathcal{M}_{2x3}$’), on ait :

$$\left[x_{z_1}, y\right]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'} = \left[y, z_1\right]_{(\mathcal{M}_{2\times3})' \times (\mathcal{M}_{2\times3})''}$$

En reprenant dans la colonne du milieu du tableau, l’expression générique d’une quelconque forme linéaire y du dual de $\mathcal{M}_{2x3}$:

$$\begin{array}{llll} y: & \mathcal{M}_{2\times3} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & [x, y]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'} = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} + \alpha_4 a_{21} + \alpha_5 a_{22} + \alpha_6 a_{23} \end{array}$$

$$\text{avec } x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

on obtient : $\forall y \in (\mathcal{M}_{2\times3})' \quad : \quad [y, z_1]_{(\mathcal{M}_{2\times3})' \times (\mathcal{M}_{2\times3})''} = 21\alpha_1 + 6\alpha_2 - \frac{6}{5}\alpha_3 - \alpha_4 + 2\sqrt{5}\alpha_6$ (6)

Comme nous cherchons l’élément $x_{z_1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2x3}$ tel que

$$\begin{aligned} \forall y \in (\mathcal{M}_{2\times3})': \quad [x_{z_1}, y]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'} &= \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + \alpha_3 x_{13} + \alpha_4 x_{21} + \alpha_5 x_{22} + \alpha_6 x_{23} \\ &= 21\alpha_1 + 6\alpha_2 - \frac{6}{5}\alpha_3 - \alpha_4 + 2\sqrt{5}\alpha_6 \qquad \text{(par (6))} \end{aligned}$$

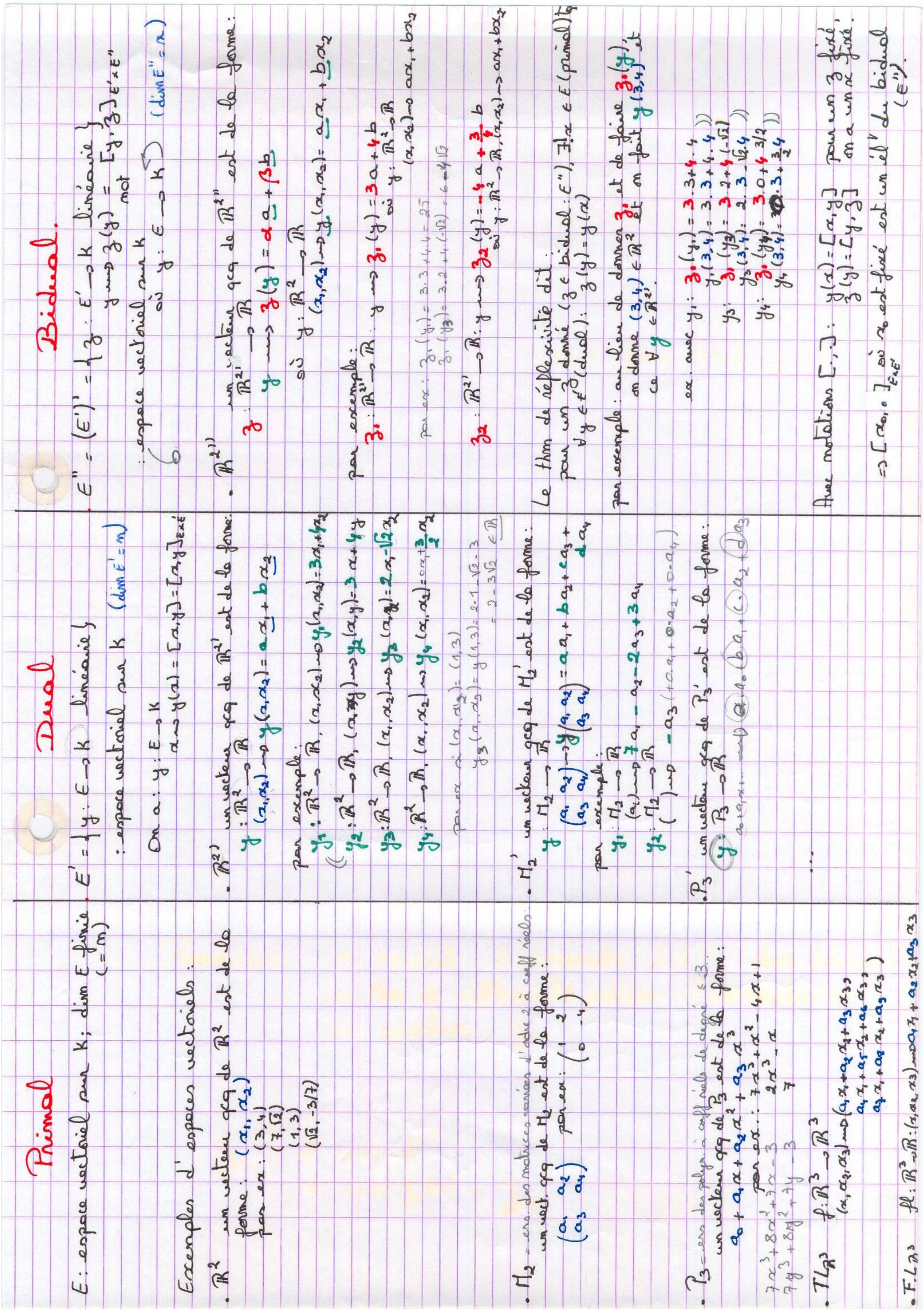
on identifie aisément les composantes de x_{z_1} :

$x_{11} = 21$ (coefficient de α_1), $x_{12} = 6$ (coefficient de α_2), $x_{13} = -\frac{6}{5}$ (coefficient de α_3),
$x_{21} = -1$ (coefficient de α_4), $x_{22} = 0$ (coefficient de α_5), $x_{23} = 2\sqrt{5}$ (coefficient de α_6).

Ainsi, en choisissant $x_{z_1} = \begin{pmatrix} 21 & 6 & -\frac{6}{5} \\ -1 & 0 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$, on a bien $\left[x_{z_1}, y\right]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'} = \left[y, z_1\right]_{(\mathcal{M}_{2\times3})'\times(\mathcal{M}_{2\times3})''}$.

Par conséquent, nous avons bien illustré qu’à tout élément z du bidual (que nous avons illustré par z_1), nous pouvons faire correspondre un élément x du primal (que nous avons illustré par x_{z_1}) tel que pour tout y appartenant au dual, on ait : $[z, y] = [y, x]$.

Nous sommes bien consciente que la présentation de cet enseignement sous forme d’un texte narratif ne rend pas clairement compte de l’apport de celui-ci. Nous invitons le lecteur à consulter le tableau ci-après pour se rendre compte d’un exemple de remplissage du tableau à la fin de l’illustration.



Primal

E : espace vectoriel sur K ; $\dim E$ finie $(= n)$

Exemples d'espaces vectoriels :

. $\mathbb{R}^2$ un vecteur qcq de $\mathbb{R}^2$ est de la forme : (x_1, x_2)
par ex : $(3,4)$, $(7,\sqrt{2})$, $(1,3)$, $(\sqrt{2},-3/7)$

. M_2 = ens. des matrices carrées d'ordre 2 à coeff réels.
un vect. qcq de M_2 est de la forme : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ par ex : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

. P_3 = ens des polyn. à coeff réels de degré ≤ 3.
un vecteur qcq de P_3 est de la forme : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
par ex. : $7x^3 + x^2 - 4x + 1$, $2x^3 - x$, 7
$7x^3 + 8x^2 + 7x - 3$
$7y^3 + 8y^2 + 7y - 3$

. $TL_{\mathbb{R}^3}$ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,\ a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6 x_3,\ a_7 x_1 + a_8 x_2 + a_9 x_3)$

. $FL_{\mathbb{R}^3}$ $fl : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3) \mapsto a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$

Dual

. $E' = \{ y : E \to K \text{ linéaire} \}$
: espace vectoriel sur K $(\dim E' = n)$
On a : $y : E \to K$
$x \mapsto y(x) = [x,y] = [x,y]_{E \times E'}$

. $\mathbb{R}^{2'}$ un vecteur qcq de $\mathbb{R}^{2'}$ est de la forme :
$y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x_1,x_2) \mapsto y(x_1,x_2) = a x_1 + b x_2$
par exemple :
$y_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1,x_2) \mapsto y_1(x_1,x_2) = 3x_1 + 4x_2$
$y_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y_2(x,y) = 3x + 4y$
$y_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1,x_2) \mapsto y_3(x_1,x_2) = 2x_1 - \sqrt{2}x_2$
$y_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1,x_2) \mapsto y_4(x_1,x_2) = 0x_1 + \frac{3}{2}x_2$
par ex si $(x_1,x_2) = (1,3)$
$y_3(x_1,x_2) = y(1,3) = 2 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot 3 = 2 - 3\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

. M_2' un vecteur qcq de M_2' est de la forme :
$y : M_2 \to \mathbb{R}$
$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mapsto y\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = a a_1 + b a_2 + c a_3 + d a_4$
par exemple :
$y_1 : M_2 \to \mathbb{R}$
$(a_i) \mapsto 7a_1 - a_2 - 2a_3 + 3a_4$
$y_2 : M_2 \to \mathbb{R}$
$(\ ) \mapsto -a_3 \ (+0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_4)$

. P_3' un vecteur qcq de P_3' est de la forme :
$y : P_3 \to \mathbb{R}$
$a_0 + a_1 x + \ldots \mapsto a\,a_0 + b\,a_1 + c\,a_2 + d\,a_3$

...

Bidual.

. $E'' = (E')' = \{ z : E' \to K \text{ linéaire} \}$
$y \mapsto z(y) \underset{\text{not}}{=} [y,z]_{E' \times E''}$
: espace vectoriel sur K $(\dim E'' = n)$
où $y : E \to K$

. $\mathbb{R}^{2''}$ un vecteur qcq de $\mathbb{R}^{2''}$ est de la forme :
$z : \mathbb{R}^{2'} \to \mathbb{R}$
$y \mapsto z(y) = \alpha a + \beta b$
où $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x_1,x_2) \mapsto y(x_1,x_2) = a x_1 + b x_2$
par exemple :
$z_1 : \mathbb{R}^{2'} \to \mathbb{R} : y \mapsto z_1(y) = 3a + 4b$
où $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x_1,x_2) \mapsto a x_1 + b x_2$
par ex : $z_1(y_1) = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 25$
$z_1(y_3) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$
$z_2 : \mathbb{R}^{2'} \to \mathbb{R} : y \mapsto z_2(y) = -4a + \frac{3}{4}b$
où $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1,x_2) \mapsto a x_1 + b x_2$

Le thm de réflexivité dit :
pour un z donné ($z \in$ bidual : E''), $\exists! x \in E$ (primal) tq $\forall y \in E'$ (dual) : $z(y) = y(x)$

par exemple : au lieu de donner z_1 et de faire $z_1(y)$, on donne $(3,4) \in \mathbb{R}^2$ et on fait $y(3,4)$ et ce $\forall y \in \mathbb{R}^{2'}$.

ex. avec y_1 : $z_1(y_1) = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4$
$y_1(3,4) = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4$
y_3 : $z_1(y_3) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-\sqrt{2})$
$y_3(3,4) = 2 \cdot 3 - \sqrt{2} \cdot 4$
y_4 : $z_1(y_4) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 3/2$
$y_4(3,4) = 0 \cdot 3 + \frac{3}{2} \cdot 4$

Avec notations $[\cdot,\cdot]$: $y(x) = [x,y]$ pour un z fixé,
$z(y) = [y,z]$ on a un x fixé.
$\Rightarrow [x_0, \cdot]_{E \times E'}$ où x_0 est fixé est un élt du bidual (E'').

Annexe 10. Proposition d'enseignement pour l'introduction des bases duales

En référence au chapitre 5, nous présentons ici une proposition d'enseignement des bases duales que nous avons conçue afin d'introduire ce thème de la dualité par une finalité outil-résolution (voir chapitre 3, § 1).

Nous souhaitons avant situer le contexte dans lequel cette proposition est faite. Nous nous plaçons dans le contexte du cours d'algèbre donné à l'université de Namur aux élèves de première année en mathématique ou en physique. Nous reprenons tout d'abord (§ 1) la table des matières du cours suivi par ces étudiants (Toint 2007). Nous ne détaillons que les parties du cours qui ont déjà été présentés aux étudiants au moment où nous souhaitons introduire notre proposition d'enseignement des bases duales. Nous avons indiqué en gras et en italique la partie où s'insère notre proposition d'enseignement. Cette partie est ensuite présentée (§ 2).

1. Table des matières du polycopié d'algèbre linéaire – 1ère bac math&physique - Université de Namur

Nous présentons la table des matières du polycopié d'algèbre linéaire de l'université de Namur, pour les étudiants de première année mathématique et physique (Toint 2007). Nous n'avons détaillé que la partie précédant la dualité, et nous avons indiqué en gras et en italique l'emplacement où doit prendre place la proposition d'enseignement sur les bases duales.

2. Proposition d'enseignement des bases duales via une fonctionnalité outil

Ce qui suit pourrait prendre place dans le polycopié du cours d'algèbre linéaire dont la table des matières est donnée à la section précédente (Toint 2007). La structure présentée ci-après est conçue pour prendre place à l'intérieur de la section « 2.5. Formes linéaires » de ce cours d'algèbre, après qu'aient été définies les formes linéaires, et que la propriété affirmant que « toute combinaison linéaire de formes linéaires est une forme linéaire » ait été vue.

Bien entendu, nous nous sommes basée, pour notre proposition d'introduction des bases duales, sur la structure déjà proposée dans le polycopié du cours. En effet, c'est dans le cadre de ce cours que ce dispositif pourrait être mis en place. Ainsi, par exemple, le dernier théorème proposé dans la formulation ci-après (théorème 2.29) a été repris du polycopié déjà existant pour que la suite du cours reste cohérente Les notations adoptées dans notre proposition tiennent aussi compte des notations déjà introduites dans le polycopié du cours. Nous avons de plus respecté la philosophie du cours en ne présentant explicitement aucune méthode. Nous avons opté à la place pour un exercice résolu.

2.5.1 Espace dual

Si l'on considère l'ensemble E' des formes linéaires sur un espace vectoriel *E*, en le munissant de l'addition et de la multiplication par un scalaire que nous venons d'envisager, on peut voir (à faire en exercice) que cet ensemble est bien un espace vectoriel. Il s'agit de *l'espace dual* de *E*.

Définition 39 *L'espace (vectoriel) dual E' d'un espace vectoriel E est composé de l'ensemble des formes linéaires sur E, muni de la loi interne d'addition (2.5) et de la multiplication par un scalaire (2.6).*
L'espace vectoriel E est alors parfois appelé l'espace primal.

Les vecteurs de l'espace dual sont donc des formes linéaires.

Nous allons maintenant introduire une notation supplémentaire, mais qui va nous faciliter le travail. Au lieu de noter l'image d'un vecteur x par une forme linéaire *y* sous la forme *y*(*x*) comme plus haut, nous noterons

$$y(x) = [x, y],$$

ce qui peut se lire : « on prend x et on lui applique y ».
Cette notation introduit une symétrie implicite entre les vecteurs de E et ceux de son dual E'.
Nous pouvons alors écrire la propriété (2.4) sous la forme

$$[\alpha x+\beta z,\ y]=\alpha[x,\ y]+\beta[z,\ y] \quad , \tag{2.7}$$

tandis que la propriété caractéristique des opérations sur les formes linéaires (les vecteurs du dual) s'écrit

$$[x,\ \alpha y+\beta z]=\alpha[x,\ y]+\beta[x,\ z] \quad . \tag{2.8}$$

Bien que les mêmes symboles « [» «] » soient utilisés, remarquons qu'il ne faut pas confondre la notation du crochet de dualité, $[x, y]$, avec la notation utilisée pour représenter les coordonnées d'un vecteur v dans une base X, $[v]^X$, ni avec la notation utilisée pour représenter une matrice, $[f]_X^Y$.

Formes coordonnées

Nous allons maintenant introduire la notion de ***formes coordonnées associées à une base*** d'un espace vectoriel E.
Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2x2}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit $X=\left\{\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\3&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}\right\}$ une base de $\mathcal{M}_{2x2}$. On sait que toute matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels peut alors s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire de ces quatre vecteurs de base, c'est-à-dire :

$$\forall M\in\mathcal{M}_{2x2}: M=m_1\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}+m_2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+m_3\begin{pmatrix}0&0\\3&0\end{pmatrix}+m_4\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}$$

ou encore, si on appelle x_i le $i^{ème}$ élément de la base X de $\mathcal{M}_{2x2}$ décrite ci-dessus, on a :

$$\forall M\in\mathcal{M}_{2x2}: M=m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+m_4x_4\,,$$

où les m_i sont les coordonnées de M dans la base X.
En particulier par exemple, la matrice $\begin{pmatrix}5&-3\\-9&5\end{pmatrix}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix}5&-3\\-9&5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&0\\3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire : $\left[\begin{pmatrix}5&-3\\-9&5\end{pmatrix}\right]^X=\begin{pmatrix}2\\-3\\-2\\1\end{pmatrix}$, c'est-à-dire que les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix}5&-3\\-9&5\end{pmatrix}$ dans la base X sont 2, -3, -2 et 1.

Si, à la place de considérer $\begin{pmatrix}5&-3\\-9&5\end{pmatrix}$, nous considérons une autre matrice (c'est-à-dire un autre élément ou vecteur de $\mathcal{M}_{2x2}$), nous obtiendrons d'autres coordonnées. On peut donc dire que les scalaires que sont les coordonnées d'une matrice de $\mathcal{M}_{2x2}$ (ou plus généralement les coordonnées d'un vecteur d'un espace vectoriel) sont ***fonction de*** la matrice (ou du vecteur) en question.

Généralisons nos propos et considérons un espace vectoriel E de dimension n, et X = $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \overset{\text{not.}}{=} \{x_i\}_{i=1}^{n}$ une base de E.
Tout vecteur v de E peut donc se décomposer de façon unique par rapport à la base X :

$$\forall v \in E : v = \boxed{?}\, x_1 + \boxed{?}\, x_2 + ... + \boxed{?}\, x_n \tag{2.9}$$

où le contenu de la $j^{ème}$ boîte $\boxed{?}$ correspond à la $j^{ème}$ coordonnée de v dans la base X.
Les contenus de ces boîtes sont donc des scalaires qui dépendent du vecteur v choisi dans E. Ces scalaires sont donc « fonction » du vecteur v choisi. On peut dès lors écrire la relation (2.9) comme suit :

$$\forall v \in E : v = y_1(v)x_1 + y_2(v)x_2 + ... + y_n(v)x_n$$

où $\forall j = 1, ..., n : y_j(v)$ est bien un scalaire si nous écrivons :

$$\forall\ \mathrm{j} = 1, ..., n :\quad y_j : \begin{array}{ccc} E & \to & K \\ v & \mapsto & y_j(v) \end{array} \tag{2.10}$$

où, pour tout v de E, $y_j(v)$ est la $j^{ème}$ coordonnée du vecteur v dans la base X.

Nous allons montrer que, une fois une base X de E fixée, on peut trouver n formes linéaires y_j telles que $\forall v \in E,\ y_j(v) =$ $j^{ème}$ coordonnée de v dans la base X. En vertu de cette caractéristique, on pourra appeler ces n formes linéaires « ***formes coordonnées associées à la base X*** ».

Montrons tout d'abord que, pour tout vecteur v de E, si on note $y_j(v)$ (avec $j = 1, ..., n$) la $j^{ème}$ coordonnée de v dans la base X, on obtient une application y_j qui est **linéaire**, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in E : y_j(\alpha u + \beta v) = \alpha y_j(u) + \beta y_j(v) \tag{2.11}$$

(2.11) exprime bien le fait que, $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in E,$ la $j^{ème}$ coordonnée de $\alpha u + \beta v$ (dans la base X) est la somme de α fois la $j^{ème}$ coordonnée de u et de β fois la $j^{ème}$ coordonnée de v.
La linéarité des y_j se démontre alors de la manière suivante :

Soient $[u]^X = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $[v]^X = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

On a : $\left.\begin{array}{l} u = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \\ v = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha u + \beta v = \alpha \sum_{i=1}^{n} u_i x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \\ = \sum_{i=1}^{n} (\alpha u_i + \beta v_i) x_i \end{array}$

On a donc bien $[\alpha u + \beta v]^X = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 \\ \vdots \\ \alpha u_n + \beta v_n \end{pmatrix}$ $\square$

Au regard de ce résultat et de (2.10), on peut donc dire que les n y_j sont des formes linéaires. Nous pourrons donc utiliser la notation du crochet de dualité qui a été introduite :

$$y_j(v) \overset{\text{not}}{=} [v, y_j].$$

Nous nous posons maintenant la question de savoir quelles conditions doivent remplir ces n formes linéaires pour que, pour *tout* vecteur v de E, $[v, y_j]$ corresponde à la $j^{ème}$ coordonnée de v dans la base X.
Pour répondre à cette question, appliquons tout d'abord notre raisonnement aux n vecteurs x_i de la base X, en commençant par le premier, x_1 :
On obtient alors très naturellement :

$$\begin{array}{lcccccccc} & x_1 = & \boxed{?}\,.\,x_1 & + & \boxed{?}\,.\,x_2 & + & \dots & \boxed{?}\,.\,x_n \\ & = & y_1(x_1).\ x_1 & + & y_2(x_1).\ x_2 & + & \dots & y_n(x_1).\ x_n \\ \text{Ou, avec le crochet de dualité :} & = & [x_1, y_1].\ x_1 & + & [x_1, y_2].\ x_2 & + & \dots & [x_1, y_n].\ x_n \\ & & & & & & & \\ \text{Or,} & x_1 = & 1\ .\ x_1 & + & 0\ .\ x_2 & + & \dots & 0\ .\ x_n \end{array}$$

En vertu de l'unicité de la représentation d'un vecteur dans une base donnée, on doit alors imposer que $[x_1, y_j] = \delta_{1j}$ pour que $[x_1, y_j]$ représente la $j^{ème}$ coordonnée de x_1 dans la base X.
Le même raisonnement peut être appliqué aux différents vecteurs x_i de la base X, pour alors imposer que

$$\forall i,\ j = 1, ..., n :\ [x_i, y_j] = \delta_{ij}\ .$$

Par conséquent, en imposant que chaque forme linéaire y_j $(j = 1, ..., n)$ doit vérifier :

$$\forall i = 1, ..., n :\ [x_i, y_j] = \delta_{ij}\ , \qquad (2.12)$$

on a défini effectivement que $\forall x_i \in X, [x_i, y_j]$ est la $j^{ème}$ coordonnée du $i^{ème}$ vecteur de la base X.

Nous allons maintenant démontrer que le résultat obtenu pour les éléments x_i de la base X est généralisable à tout vecteur v de E. C'est ce qu'exprime le théorème suivant.

Théorème 2.23 Soient E un espace vectoriel de dimension n, et $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ une base de E. Soient n formes linéaires y_p $(1 \le p \le n)$ telles que

$$\forall i,\ j = 1, ..., n :\ [x_i, y_j] = \delta_{ij}\ . \qquad (2.13)$$

Alors $\forall v \in E : [v, y_p]$ est la $p^{ème}$ coordonnée de v dans la base X.

Preuve.

Comme $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ est une base de E, on peut écrire :

$$\forall v \in E\ \ \exists\,!\,\alpha_i (i = 1, ..., n)\ :\ [v]^X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{(décomposition d'un vecteur dans une base)}$$

c'est-à-dire : $v = \alpha_1 . x_1 + \alpha_2 . x_2 + ... + \alpha_n . x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

ou encore : $\forall p,\ \ \alpha_p$ est la $p^{ème}$ coordonnée de v dans la base X.

On a donc, pour tout y_p vérifiant les hypothèses : $y_p(v) \overset{\text{not}}{=} [v, y_p] = [\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y_p]$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x_i, y_p]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ip}$$

$$= \alpha_p \qquad \square$$

Nous avons donc démontré que, à toute base *X* de *E*, on peut associer *n* formes linéaires y_j telles que, si les conditions $\forall i,\ j = 1, ..., n:\ [x_i, y_j] = \delta_{ij}$ sont vérifiées, ces *n* formes linéaires y_j peuvent être qualifiées de « ***formes coordonnées associées à la base X*** », étant donné que la forme linéaire y_j appliquée à un vecteur quelconque *v* de *E* donne la $j^{ème}$ coordonnée de ce vecteur *v* dans la base *X* de *E*.

Nous allons maintenant démontrer que ces *n* formes linéaires associées à la base *X* de *E* par les relations (2.13), constituent une base de *E'*, le dual de *E*.

Théorème 2.24 Soient *E* un espace vectoriel de dimension *n*, et $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ une base de *E*. Soient *n* formes linéaires y_j telles que $\forall i,\ j = 1, ..., n:\ [x_i, y_j] = \delta_{ij}$.
Alors $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ constitue une base de *E'*.

Preuve.

- Montrons tout d'abord que $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0) \Rightarrow (\forall i = 1, .., n : \alpha_i = 0)$.

Remarquons que $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0)$ signifie que $\forall v \in E : [v, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i] = [v, 0]$, ou encore : $\forall v \in E : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .[v, y_i] = 0$ par définition de la somme de formes linéaires et de la multiplication d'un scalaire et d'une forme linéaire (voir (2.8)).
Comme $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ est une base de *E*, tout vecteur *v* de *E* peut donc s'écrire comme $v = \sum_{j=1}^{n} v_j x_j$ où les v_j sont les coordonnées de *v* dans la base *X* ($v_j \in K$).

On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall v \in E : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .[v, y_i] = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall v_l \in K : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . [\sum_{j=1}^{n} v_j x_j, y_i] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall v_l \in K : \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i v_j [x_j, y_i] = 0 \quad \text{(linéarité des } y_i\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall v_l \in K : \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i v_j \delta_{i,j} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall v_l \in K : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \\
&\Rightarrow \quad \forall i = 1, ..., n : \alpha_i = 0
\end{aligned}$$

- Montrons ensuite que $\forall y \in E' : \exists \alpha_i \in K : y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$, ce qui revient à démontrer que $\forall y \in E' : \exists \alpha_i \in K : \quad \forall v \in E :\ [v, y] = [v, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i]$ ou encore :

$$\forall y \in E': \exists \alpha_i \in K: \quad \forall v \in E: \ [v, y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [v, y_i]$$

Comme $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ est une base de E et que $\forall i, j = 1, ..., n: \ [x_i, y_j] = \delta_{ij}$, on sait que $\forall v \in E, \ y_j(v) \overset{\text{not}}{=} [v, y_j]$ représente la $j^{ème}$ coordonnée de v dans la base X. On a donc :

$$\forall v \in E: \quad v = \sum_{i=1}^{n} [v, y_i] x_i$$

Ceci entraîne que :

$$\begin{aligned} \forall y \in E': \quad \forall v \in E: \quad [v, y] &= [\sum_{i=1}^{n} [v, y_i]\, x_i \ , \ y] \\ &= \sum_{i=1}^{n} [v, y_i]\, [x_i, y] \quad \text{car } y \text{ est linéaire et } [v, y_i] \in K. \end{aligned}$$

En posant $\forall i = 1, ..., n$, $\alpha_i = [x_i, y]$, on a alors :

$$\forall y \in E': \quad \exists \alpha_i \in K: \ \forall v \in E: \quad [v, y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [v, y_i] \qquad \square$$

La proposition 2.24 nous permet alors d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 2.25 L'espace (vectoriel) dual *E'* d'un espace vectoriel *E* de dimension *n* est aussi de dimension *n*.

Théorème 2.26 Tout espace vectoriel de dimension finie *E* est isomorphe à son dual *E'*.

Preuve.

Ceci résulte directement du fait que si *E* est un espace vectoriel sur *K*, alors *E'* l'est aussi, grâce aux lois que nous avons construites pour en faire un espace vectoriel (définies en (2.5) et (2.6)). Par le théorème 2.25, nous savons qu'ils ont même dimension, ils sont donc isomorphes (par le théorème 2.4). □

Définition 40 *La **base duale** d'une base* $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ *d'un espace vectoriel E est la base Y =* $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ *de l'espace dual vérifiant les relations* $\forall i, j = 1, ..., n: \ [x_i, y_j] = \delta_{ij}$.

Les éléments de la base duale d'une base *X* sont les formes linéaires que nous avions qualifiées de « ***formes coordonnées associées à la base X*** », étant donné que la $i^{ème}$ forme linéaire de la base duale *Y* appliquée à un vecteur quelconque de *E* fournit la $i^{ème}$ coordonnée de ce vecteur dans la base *X* (voir proposition 2.23).

Montrons un résultat plus global que la proposition 2.24 :

Théorème 2.27 Soit *E* un espace vectoriel de dimension *n*.
Soient $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ un ensemble de *n* vecteurs de *E* et $\{y_j\}_{j=1}^{n}$ un ensemble de *n* formes linéaires définies sur *E*. Si les x_i et les y_j vérifient les relations

$$\forall i, j = 1, ..., n: \ [x_i, y_j] = \delta_{ij},$$

Alors $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ constitue une base de *E* et $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ constitue une base de *E'*.

Preuve.

Remarquons qu'il nous suffit de démontrer l'indépendance linéaire des *n* vecteurs x_i. Nous aurons alors démontré que $\{x_i\}_{i=1}^n$ forme une base de *E*, ce qui nous ramène alors dans les conditions du théorème précédent qui permet de conclure que $\{y_j\}_{j=1}^n$ est une base du dual.

Si, $\forall j = 1, ..., n$, nous appliquons y_j à la relation $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\forall j = 1, ..., n: \quad [\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i,\ y_j] &= [0,\ y_j]\\ \sum_{i=1}^n \alpha_i [x_i,\ y_j] &= 0\\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} &= 0\\ \alpha_j &= 0 \qquad \square\end{aligned}$$

Remarque :

Soit *E*, un espace vectoriel de dimension *n* construit sur le champ *K*.

Soit $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ une base de *E* et $X' = \{y_j\}_{j=1}^n$ sa base duale (qui est donc une base du dual *E'*).

Tout vecteur *v* de *E* peut donc s'écrire : $v = \sum_{i=1}^n v_i x_i$ où $v_i \in K \ \ (i = 1, ..., n)$.

Toute forme linéaire *y* de *E'* peut donc s'écrire : $y = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j$ où $\alpha_j \in K \ \ (j = 1, ..., n)$.

On a donc : $\forall y \in E': \quad \forall v \in E: \quad [v,\ y]$
$$\begin{aligned} &= [\sum_{i=1}^n v_i x_i \ ,\ \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j\ ]\\ &= \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^n \alpha_j\ [x_i\ ,\ y_j] && \text{par (2.7) et (2.8)}\\ &= \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^n \alpha_j\ \delta_{ij} && \text{car } X' \text{ est la base duale de } X\\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\end{aligned}$$

Nous obtenons là une <u>expression analytique</u> pour n'importe quelle forme linéaire, pour peu que l'on se munisse d'une base du primal (par exemple la base canonique) et de sa base duale. Cette expression analytique sera largement utilisée dans les exercices, comme nous le montre l'exercice suivant.

Exercice :

Déterminer la base duale de la base $X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}$ $\overset{not.}{=} \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2x2}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

Nous devons donc définir 4 formes linéaires $y_j \ \ (j = 1, ..4)$ qui vérifient $y_j(x_i) = \delta_{ij} \ \ (i,\ j = 1, ..., 4)$.

- Pour ce faire, nous devons tout d'abord écrire l'expression analytique d'une forme linéaire quelconque définie sur $\mathcal{M}_{2x2}$.

  La remarque ci-dessus nous y aide : $\forall y \in (\mathcal{M}_{2x2})', \forall M \in \mathcal{M}_{2x2} : y(M) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i m_i$ (2.14)

  où les m_i sont les coordonnées de M dans la base canonique (par exemple) de $\mathcal{M}_{2x2}$; les α_i $(i = 1, ..., 4)$ représentent quant à eux les coordonnées de y dans la base canonique duale (si c'est la base canonique qui a été choisie pour les m_i).

  Comme la relation (2.14) est vraie pour toute forme linéaire du dual, elle s'applique donc aussi aux formes linéaires y_j $(j = 1, ..4)$ de la base duale :

  $\forall j \in \{1, 2, 3, 4\} : \forall M \in \mathcal{M}_{2x2} : y_j(M) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i m_i$.

  On a donc, pour $j = 1$: $\forall M \in \mathcal{M}_{2x2} : y_1(M) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i m_i$. (2.15)

  Il en est évidemment de même pour y_2, y_3, y_4 .

  Or, toute matrice de $\mathcal{M}_{2x2}$ est du type $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. La base canonique de $\mathcal{M}_{2x2}$ étant $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, les coordonnées d'une telle matrice quelconque $M \in \mathcal{M}_{2x2}$ sont $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que dans (2.15), $m_1 = a; m_2 = b; m_3 = c; m_4 = d$.

- Pour déterminer la première forme linéaire de la base duale à calculer (y_1), utilisons la relation (2.13) liant une base à sa base duale, particularisée à y_1 : $y_1(x_i) = \delta_{i1}$. Ceci va nous permettre de déterminer les α_i $(i = 1, ..., 4)$ dans (2.15).

  On obtient alors : $\begin{cases} y_1(x_1) = y_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.0 + \alpha_2.1 + \alpha_3.1 + \alpha_4.0 = 1 \\ y_1(x_2) = y_1\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.2 + \alpha_2.0 + \alpha_3.0 + \alpha_4.0 = 0 \\ y_1(x_3) = y_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \alpha_1.0 + \alpha_2.1 + \alpha_3.3 + \alpha_4.4 = 0 \\ y_1(x_4) = y_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \alpha_1.1 + \alpha_2.0 + \alpha_3.0 + \alpha_4.5 = 0 \end{cases}$, ce qui constitue un système de 4 équations à 4 inconnues (α_i $(i = 1, ..., 4)$).

  En résolvant ce système, on trouve : $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \frac{3}{2},\ \alpha_3 = \frac{-1}{2},\ \alpha_4 = 0$. Par conséquent, y_1 est défini par :

  $$\begin{aligned} y_1 : \quad \mathcal{M}_{2x2} \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad &\mapsto \quad y_1(M) = \frac{3}{2} b - \frac{1}{2} c \end{aligned}$$

- On reprend ensuite le raisonnement ci-dessus, appliqué à y_2, y_3, y_4 .

Pour y_2, on résout $\begin{cases} y_2(x_1) = y_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.0+\alpha_2.1+\alpha_3.1+\alpha_4.0 = 0 \\ y_2(x_2) = y_2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.2+\alpha_2.0+\alpha_3.0+\alpha_4.0 = 1 \\ y_2(x_3) = y_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \alpha_1.0+\alpha_2.1+\alpha_3.3+\alpha_4.4 = 0 \\ y_2(x_4) = y_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \alpha_1.1+\alpha_2.0+\alpha_3.0+\alpha_4.5 = 0 \end{cases}$ pour trouver :

$$\begin{array}{llll} y_2 : & \mathcal{M}_{2x2} & \to & \mathbb{R} \\ & M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & y_2(M) = \frac{1}{2}a - \frac{2}{10}b + \frac{2}{10}c - \frac{1}{10}d \end{array}$$

Pour y_3, on résout $\begin{cases} y_3(x_1) = y_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.0+\alpha_2.1+\alpha_3.1+\alpha_4.0 = 0 \\ y_3(x_2) = y_3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.2+\alpha_2.0+\alpha_3.0+\alpha_4.0 = 0 \\ y_3(x_3) = y_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \alpha_1.0+\alpha_2.1+\alpha_3.3+\alpha_4.4 = 1 \\ y_3(x_4) = y_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \alpha_1.1+\alpha_2.0+\alpha_3.0+\alpha_4.5 = 0 \end{cases}$ pour trouver :

$$\begin{array}{llll} y_3 : & \mathcal{M}_{2x2} & \to & \mathbb{R} \\ & M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & y_3(M) = \frac{-1}{2}b + \frac{1}{2}c \end{array}$$

Pour y_4, on résout $\begin{cases} y_4(x_1) = y_4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.0+\alpha_2.1+\alpha_3.1+\alpha_4.0 = 0 \\ y_4(x_2) = y_4\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.2+\alpha_2.0+\alpha_3.0+\alpha_4.0 = 0 \\ y_4(x_3) = y_4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \alpha_1.0+\alpha_2.1+\alpha_3.3+\alpha_4.4 = 0 \\ y_4(x_4) = y_4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \alpha_1.1+\alpha_2.0+\alpha_3.0+\alpha_4.5 = 1 \end{cases}$ pour trouver :

$$\begin{array}{llll} y_4 : & \mathcal{M}_{2x2} & \to & \mathbb{R} \\ & M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & y_4(M) = \frac{4}{10}b - \frac{4}{10}c + \frac{1}{5}d \end{array}$$

- On peut donc conclure que la base duale de $X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}$ est $\{y_1, \ y_2, \ y_3, \ y_4\}$ où les formes linéaires $y_j \ \ (j = 1, ..4)$ sont définies ci-dessus.

Remarquons que, grâce à l'exercice précédent et au théorème 2.23, on peut facilement obtenir les coordonnées d'un vecteur (une matrice !) quelconque de $\mathcal{M}_{2x2}$ dans la base X définie dans l'exercice ci-dessus. Par exemple, pour obtenir les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ dans la base X, utilisons la propriété « formes coordonnées » des éléments de base duale $\{y_1, \ y_2, \ y_3, \ y_4\}$ déterminée dans l'exercice précédent :

La 1$^{\text{ère}}$ coordonnée de $M = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ dans la base X sera $y_1(M) = y_1\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}.7 - \frac{1}{2}.3 = \boxed{9}$;

la 2$^{\text{ème}}$ coordonnée de M dans la base X sera $y_2\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.10 - \frac{2}{10}.7 + \frac{2}{10}.3 - \frac{1}{10}.(-8) = \boxed{5}$;

la 3$^{\text{ème}}$ coordonnée de M dans la base X sera $y_3\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.7 + \frac{1}{2}.3 = \boxed{-2}$;

la 4$^{\text{ème}}$ coordonnée de M dans la base X sera $y_4\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \frac{4}{10}.7 - \frac{4}{10}.3 + \frac{1}{5}.(-8) = \boxed{0}$.

Ce qui fait que $\left[\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}\right]^X = \begin{pmatrix} \boxed{9} \\ \boxed{5} \\ \boxed{-2} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$,

c'est-à-dire que $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \boxed{9}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \boxed{5}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \boxed{-2}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \boxed{0}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Etant donné que la base duale d'une base *X* d'un espace vectoriel *E* nous permet d'obtenir les coordonnées dans la base *X* d'un vecteur quelconque de *E*, nous allons pouvoir utiliser cette base duale pour la construction de la matrice d'une transformation linéaire par rapport à cette base *X* :

Théorème 2.28. Soit $X = \{x_1, ..., x_n\}$ une base quelconque de l'espace vectoriel *E* de dimension *n*. Soit $X' = \{y_1, ..., y_n\}$ la base duale dans *E'* (définie par la proposition (2.13)).
Soit, de plus, (a_{ij}) la matrice d'une transformation linéaire *f* sur *E*.
Alors, $a_{ij} = [f(x_j), y_i]$

Preuve.

Evident si on se rappelle que l'élément a_{ij} de la matrice dont il est question n'est autre que la $i^{ème}$ coordonnée dans la base *X* de $f(x_j)$. Or, y_i, en tant qu'élément de la base duale de *X*, n'est autre qu'une « forme coordonnée », c'est-à-dire qu'appliquée à un vecteur quelconque (et en particulier à $f(x_j)$) de *E*, elle en donne la $i^{ème}$ coordonnée dans la base *X*.

Citons encore un dernier résultat qui sera utilisé par la suite dans le cours :

Théorème 2.29 Pour tout vecteur non nul *x* d'un espace vectoriel de dimension finie *E*, il existe une forme linéaire *y* dans *E'*, le dual de *E*, telle que $[x, y] \neq 0$.

Preuve.

Soient $\{x_i\}_{i=1}^n$ et $\{y_i\}_{i=1}^n$ une base de *E* et sa base duale dans *E'*, (satisfaisant donc (2.13)). Soit *x*, un vecteur quelconque de *E*. On peut donc écrire $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$, où $\beta_i = [x, y_i]$, étant donné que les formes linéaires de la base duale de X sont des formes coordonnées (Théorème 2.23). Donc, si $[x, y]$ est nul pour tout y, et en particulier pour $y_i \quad (i = 1, ..., n)$, alors tous les β_i sont nuls et x l'est aussi. □

Remarque : On peut voir immédiatement que cette dernière proposition implique que si u et v dont deux vecteurs différents d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors il existe une forme linéaire y dans E' telle que $[u, y] \neq [v, y]$. Il suffit en effet de substituer $x = u - v$ dans la proposition 2.29.

2.5.2. Réflexivité

Continuation normale du cours

Annexe 11. Guide d’entretien pour l’interview du professeur enseignant la dualité en 2009-2010

Nous présentons ici le guide d’entretien que nous avons suivi pour l’interview du professeur enseignant la dualité en 2009-2010 (voir chapitre 5, § 4.2).

1. Quel est votre parcours professionnel ?

2. Comment en êtes-vous arrivé à donner le cours d’algèbre linéaire aux étudiants inscrits en première année math/physique à l’université de Namur ?

3. Quel est votre point de vue sur l’enseignement des mathématiques (en général) qu’il faut apporter aux mathématiciens et physiciens ?

4. Quel est votre point de vue sur l’enseignement de l’algèbre linéaire ?

5. Qu’est-ce qui, selon vous, est important dans l’enseignement de l’algèbre linéaire ?

6. Quelle importance accordez-vous aux démonstrations et au formalisme ? Faites-vous des différences entre mathématiciens et physiciens ?

7. Quel est l’objectif de l’enseignement de la dualité en algèbre linéaire ?

8. Si vous étiez titulaire du cours, présenteriez-vous le cours de la même façon que dans le polycopié (Toint 2007) ?

9. Si vous étiez titulaire du cours, garderiez-vous encore la dualité ?

10. Quel est votre avis sur la partie du cours, concernant la dualité, présente dans le polycopié (Toint 2007) ?

11. Quelles sont les raisons des choix *a priori* sur la proposition de cours sur la dualité (dispositif « bases duales ») ?

12. Quelles sont vos impressions *a posteriori* sur la façon dont les étudiants ont perçu les parties reprises de la proposition d’enseignement sur les bases duales ?

Annexe 12. Détail du déroulement de l'enseignement des notions de dualité en 2009-2010 en première année math-physique à l'université de Namur

En référence au chapitre 5, § 4.2, nous présentons ici le détail du déroulement de l'enseignement des notions de dualité en 2009-2010 en première année, sections mathématique et physique, à l'université de Namur.

La partie du cours d'algèbre en MP1 concernant la dualité a débuté le 10 novembre 2009 avec la présentation des formes linéaires comme cas particulier des applications linéaires. Avant cette date, le cours théorique avait déjà présenté, depuis le début de l'année académique, les espaces vectoriels (structures algébriques, dépendance linéaire et dimension, sous-espaces vectoriels), les applications et transformations linéaires (noyau, image, matrices par rapport à des bases). Précisons que les étudiants n'ont pas encore abordé les notions de dualité en travaux dirigés.

Le cours suivant (17/11/2009) a permis de montrer que l'ensemble des formes linéaires pouvait être muni d'une structure d'espace vectoriel (le dual), et a introduit la notation du crochet de dualité. L'introduction des bases duales s'est faite après avoir appliqué un théorème suivant :

> Soient *E* un espace vectoriel de dimension *n* construit sur le champ *K*, et *y* est une forme linéaire définie sur cet espace ($y : E \to K$). Soient aussi $\mathrm{X} = \{x_1, ..., x_n\}$ une base de *E*, et un ensemble de *n* scalaires : $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset K$. Si la forme linéaire *y* est définie en tous vecteurs de la base *X* par : $y(x_i) = \alpha_i$ pour $i = 1, ..., n$, alors la forme linéaire y est définie en tout vecteur de *E*.

Si l'on se munit d'une base *X* d'un espace vectoriel *E* de dimension *n*, la « construction » de *n* formes linéaires peut donc se faire en choisissant *n* ensembles de *n* scalaires particuliers : $\{1, 0, 0, ..., 0\}$, $\{0, 1, 0, ..., 0\}$, … , $\{0, 0, 0, ..., 1\}$. Il reste alors à démontrer que les *n* formes linéaires ainsi construites forment une base de l'espace dual de *E*.

C'est par cette démonstration que débute le cours du 24//11/09, après quelques rappels introductifs. Les deux espaces, *E* et *E'*, étant alors de même dimension, ils sont isomorphes. De plus, si l'on change la base *X* au départ du raisonnement, une autre base du dual sera établie. Les deux bases étant donc liées, cela motive l'appellation, pour la base du dual construite à partir de la base *X* de *E*, de « base duale de *X* ».

C'est pour expliquer le rôle du lien entre ces deux bases que le vocable « formes coordonnées » est utilisé par Prof.S., le professeur suppléant donnant le cours d'algèbre, en rapport avec notre proposition d'enseignement. Il montre en effet qu'une forme linéaire y_i, prise quelconque dans la base duale d'une base *X* d'un espace vectoriel *E*, associe à un vecteur *v* quelconque dans *E* sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans la base *X*. Un exercice est alors énoncé et résolu par le professeur, dans le cadre de $\mathbb{R}^2$: le calcul de la base duale d'une base de $\mathbb{R}^2$. Ensuite, après avoir calculé les coordonnées dans la base *X* d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ donné, le professeur montre qu'on peut retrouver celles-ci en appliquant les formes linéaires de la base duale. Il fait ensuite le lien avec les recherches de composantes lors de la construction d'une matrice associée à une application linéaire (voir théorème présenté dans le Tableau 12.I).

Théorème 2.28. Soit $X = \{x_1, ..., x_n\}$ une base quelconque de l'espace vectoriel *E* de dimension *n*. Soit $X' = \{y_1, ..., y_n\}$ la base duale dans *E'* (définie par la proposition (2.13)).

Soit, de plus, (a_{ij}) la matrice d'une transformation linéaire *f* sur *E*.

Alors, $a_{ij} = [f(x_j), y_i]$

Tableau 12.I : Théorème faisant intervenir la fonctionnalité outil "formes coordonnées" des bases duales

Après l'énoncé et la démonstration d'un lemme, le théorème de réflexivité est introduit dans ce cours : existence du bidual, isomorphisme existant entre le primal et le dual, entre le dual et le bidual, donc entre le primal et le bidual. Mais dans ce dernier cas, il s'agit d'un isomorphisme canonique, c'est-à-dire qui peut être définit sans obligation de référence à des bases.

Le cours du 1/12/09 est ensuite consacré à la démonstration du théorème de réflexivité, et à la présentation de l'application transposée et de ses propriétés.

Annexe 13. Notes de deux étudiants concernant l'introduction de la dualité et les bases duales en 2009-2010 en première année math-physique à l'université de Namur

En référence au chapitre 5, § 4.2, nous présentons ici les notes que deux étudiants ont prises au cours théorique lors de l'introduction de la dualité (formes linéaires et dual), de la présentation des bases duales et de la fonctionnalité outil des formes coordonnées (nous nous sommes arrêtées à la présentation du théorème de réflexivité).

1. Notes de l'étudiant 1

→ Rappel

$(E, (\mathbb{K}, +, .), \boxed{+}, \bullet)$

$\boxed{+}$: E = $+$; $\bullet$: $\mathbb{K} \times E$ = $\bullet$

$E = \mathbb{K}$

$\mathbb{K}$ e-v sur $\mathbb{K}$

$\boxed{\text{Formes linéaires}}$

$\mathcal{Y} = \{ y : E \longrightarrow \mathbb{K} \text{ linéaire} \}$

→ e-v

$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{Y} : (y_1 \boxed{+} y_2) = ?$

$\Longleftrightarrow \forall x \in E : (y_1 \boxed{+} y_2)(x) = y_1(x) + y_2(x)$ ($+$ → $\mathbb{K}$)

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall y \in \mathcal{Y}$: $(\alpha \bullet y)(x) = \alpha . y(x)$ ($\alpha \in \mathbb{K}$, $y(x) \in \mathbb{K}$)

e-v : $E' = (\mathcal{Y}, +, \bullet)$

Lois $\mathcal{Y}$ → $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ $\quad \underbrace{(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)}_{\in \mathcal{Y}}(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ $\quad \forall x \in E$

y est linéaire : $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, $\forall x_1, x_2 \in E$ $\quad y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y(x_1) + \alpha_2 y(x_2)$

$y(x) = [x, y]_{E \times E'}$ → crochet de dualité ($x \in E$, $y \in E'$)

x : $\in E$ = PRIMAL

y : $\in E'$ = DUAL

Linéarité de y $\quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, $\forall x_1, x_2 \in E$ $\quad y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y(x_1) + \alpha_2 y(x_2)$

$\Longleftrightarrow [\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] = \alpha_1 [x_1, y] + \alpha_2 [x_2, y]$

Lois de E' $\quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, $\forall y_1, y_2 \in E'$ $\quad (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$

$= [x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 [x, y_1] + \alpha_2 [x, y_2]$

$y(x) = [x, y]$ est bilinéaire ($x \in E$, $y \in E'$)

Chapitre 2

26 $E' =$ e.v dual

$y \in E' \quad y : E \longrightarrow \mathbb{K}$ linéaire

* **Théorème 2.23**

base de E = $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$

Si $y(x_i) = \alpha_i \quad i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow y$ est $\begin{cases} \text{bien définie} \\ \text{connue partout} \end{cases}$

Dém.

$\forall x \in E \quad y(x) =$

$\hookrightarrow \exists \beta_i : x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$

y linéaire

$$y(x) = y\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boxed{\underbrace{y(x_i)}_{=\alpha_i}} \quad \text{cqfd}$$

Exemple

$E = \mathbb{R}^2 \qquad X = \{(1,1),(1,-1)\} \qquad y(x) = ?$

$y(1,1) = ?\ 13$

$y(1,-1) = ?\ 7$

$x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow x = (x_1, x_2)$

$= \beta_1 (1,1) + \beta_2 (1,-1)$

$= (\beta_1 + \beta_2, \ \beta_1 - \beta_2)$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = x_1 \\ \beta_1 - \beta_2 = x_2 \end{cases} \qquad (x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}(1,1) + \frac{x_1 - x_2}{2}(1,-1)$$

$2\beta_1 = x_1 + x_2 \qquad y(x_1, x_2) = \frac{x_1+x_2}{2} \underbrace{y(1,1)}_{=13} + \frac{x_1 - x_2}{2} \underbrace{y(1,-1)}_{=7}$

$2\beta_2 = x_1 - x_2$

$= 10x_1 + 3x_2$

* Théorème 2.24

$y_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall i \; \forall j$

↳ 1 si $i = j$
0 si $i \neq j$

$\Rightarrow \{y_1, \dots, y_n\} = Y =$ base de E' $\Rightarrow$ Li + G

$\Rightarrow \dim E' = n$

Dém

$\boxed{Li}$ Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0_{E'}$ Alors $\forall j = 1, \dots, n : \alpha_i = 0_{\mathbb{K}}$

$\Leftrightarrow \forall x \in E : \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)(x) = 0_{E'}(x)$

$$\left[x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x, y_i] = 0$$

Cas particulier : $x = x_j$ $\longrightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x_j, y_i] = 0 = \alpha_j$

fixé

$y_i(x_j) = \delta_{ij} \Rightarrow$ Nul partout sauf qd $i = j$

$\forall j = 1, \dots, n$

$\boxed{G}$ de E' $\quad \forall y \in E' : \exists! \, \alpha_i \in \mathbb{K} : \quad y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$

$\Leftrightarrow \forall x \in E : \quad y(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)(x)$

$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, y_i(x)$

$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$

connu

$y\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, y_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j\right)$ (*)

$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \, y(x_j)$

$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, y(x_i)$

(*) $= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j \underbrace{y_i(x_j)}_{\delta_{ij}}$

$= \beta_i$

$\Rightarrow \alpha_i = y(x_i)$

Chapitre 2

21. $E \cong E'$: $\underset{\downarrow \atop m}{\dim E} = \underset{\hookrightarrow \text{dém. } 2.24}{\dim E'} \iff E \cong E'$

$G : E \longrightarrow E'$ applicat° linéaire bijective

$\boxed{\begin{matrix} E \cong \mathbb{K}^m \\ E' \cong \mathbb{K}^m \end{matrix}} \implies E \cong E'$

$E \longrightarrow \mathbb{K}^m$
X
$x = \sum \alpha_i x_i \longrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$

$E \cong \mathbb{K}^m$
$E' \cong \mathbb{K}^m$

$X = \{x_i\}_{i=1}^m$ base de E

$\Downarrow$

$Y = \{y_j\}_{j=1}^m$ base de E'

$y_j(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i \ \forall j$ $\longrightarrow$ la base duale de X = une base de E'

$X = \{x_i\}_{i=1}^m \longrightarrow Y = \{y_j\}_{j=1}^m$

$x \in E$
$\hookrightarrow x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$

$y_j(x) = y_j\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i\right)$

$= \sum_{i=1}^m \alpha_i \underbrace{y_j(x_i)}_{\delta_{ij}} = \alpha_j$

$\boxed{y_j} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ formes "coordonnées"
$x \longrightarrow \alpha_j$

$E = \mathbb{R}^2$

$X = \{(1,1), (1,-1)\}$

$E' = (\mathbb{R}^2)' = \{y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linéaire}\}$
$Y = \{y_1, y_2\}$

$y_1(1,1) = 1 \qquad y_2(1,1) = 0$

$y_1(1,-1) = 0 \qquad y_2(1-1) = 1$

$$\begin{cases} y_1(a_1, a_2) = \alpha a_1 + \beta a_2 \\ y_1(1,1) = \alpha + \beta = 1 \\ y_1(1,-1) = \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow \alpha = \frac{1}{2} = \beta$

$\longrightarrow y_1(a_1, a_2) = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2$

$$\begin{cases} y_2(a_1, a_2) = \alpha a_2 + \beta a_2 \\ y_2(1,1) = \alpha + \beta = 0 \\ y_2(1,-1) = \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

$\longrightarrow \alpha = \frac{1}{2} = -\beta$

$\longrightarrow y_2(a_1, a_2) = \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2$

$\varphi : \underset{X}{E} \longrightarrow \underset{X}{E}$ linéaire

$[\varphi]_X^X = (a_{ij})$

$\varphi(x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k$

$$[\varphi(x_j)]^X = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = y_i(\varphi(x_j)) = [\varphi(x_j), y_i]$ (Thm 2.28)

<u>Lemme 2.27</u>

$\forall x \neq 0 \quad \exists y \in E' \quad y(x) \neq 0_K$

<u>Démo</u> (par l'absurde)

$x \neq 0 \longrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ → fixé

$\forall y \in E' : \underbrace{y(x)}\ = 0$

$y\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right) = 0$

$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \, y(x_i) = 0$

Chapitre 2

E 22.

Cas particulier $y = y_j \longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \beta_i \underbrace{y_j(x_i)}_{\delta_{ij}} = 0 = \beta_j \quad j = 1, \dots, m$

$\longrightarrow x = 0$

CONTRADICTION

$\underset{\substack{e\text{-}v \\ \dim m}}{E} \equiv \underset{\substack{e\text{-}v \\ \dim m}}{E'} \equiv \underset{e\text{-}v}{E''}$ $\quad Z = \{ z_k \}_{k=1}^{m}$

$X = \{ x_i \}_{i=1}^{m} \quad Y \{ y_j \}_{j=1}^{m}$ $\quad \underbrace{z_k}_{\in E''} (\underbrace{y_j}_{\in E'}) = [\underbrace{y_j}_{\in E'}, \underbrace{z_k}_{\in E''}] = \delta_{jk}$

$\underbrace{y_j}_{\in E'} (\underbrace{x_i}_{\in E}) = [\underbrace{x_i}_{\in E}, \underbrace{y_j}_{\in E'}]_{E \times E'} = \delta_{ij}$

Ccl. $\dim E = \dim E' = \dim E''$

$E \equiv E' \equiv E'' = \dots$

primal $\quad$ dual $\quad$ bidual

$= \{ z : E' \xrightarrow[\text{linéaire}]{} \mathbb{K} \}$

$E \equiv E''$ $\exists$ des bijections linéaires $|e|$ E et E''

$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{bijection linéaire naturelle} \\ \text{isomorphisme naturel} \end{array} \right.$ $|e|$ E et E''

déf. $\sigma : E \longrightarrow E''$

$x \longrightarrow \sigma(x) = z_x$

tq $\forall y \in E' : \underbrace{\underbrace{z_x}_{\in E''} (\underbrace{y}_{\in E'})}_{\in \mathbb{K}} = \underbrace{\underbrace{y}_{\in E'} (\underbrace{x}_{\in E})}_{\in \mathbb{K}}$

$$[y, z_x]_{E' \times E''} = [x, y]_{E \times E'}$$

Réflexivité $\quad [\boxed{x}, \underline{y}]_{E \times E'} = [\underline{y}, \boxed{z_x}]_{E' \times E''}$

2. Notes de l'étudiant 2

L'étudiant 2 a pris note en annotant le polycopié du cours d'algèbre linéaire (Toint 2007). Nous présentons donc l'extrait annoté par cet étudiant en rapport avec la partie qui nous intéresse. Nous avons laissé la même disposition que dans le polycopié : notes manuscrites de l'étudiant en vis-à-vis de la page du polycopié.

linéarité de y :

$$\left.\begin{array}{l}\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \\ \forall x_1, x_2 \in E\end{array}\right\} \; y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y(x_1) + \alpha_2 y(x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] = \alpha_1 [x_1, y] + \alpha_2 [x_2, y]$$

lois de E' :

$$\left.\begin{array}{l}\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \\ \forall y_1, y_2 \in E'\end{array}\right\} \; (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{[x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2]}_{\text{crochet de dualité}} = \alpha_1 [x, y_1] + \alpha_2 [x, y_2]$$

$$y(x) = [\underset{\in E}{x}, \underset{\in E'}{y}]$$

est bilinéaire (2 arguments)

E' = e-v dual

$y \in E'$ $\quad y : E \to \mathbb{K}$ linéaire

Th 2.23 : base de $E = X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$

Si $y(x_i) = \alpha_i \quad i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ y est bien définie et connue partt

$\forall x \in E : y(x) = ?$

$\hookrightarrow \exists \beta_i : x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$

$$y(x) = y\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y(x_i)$$

cqfd

Exemple : $E = \mathbb{R}^2 \quad X = \{(1,1)(1,-1)\}$ $\quad y(x) = ?$

$y(1,1) = 13$

$y(1,-1) = 7$

$x \in \mathbb{R}^2$

$\to x = (\underbrace{x_1, x_2})$

$= \beta_1(1,1) + \beta_2(1,-1)$

$= (\beta_1 + \beta_2, \beta_1 - \beta_2)$

$\beta_1 + \beta_2 = x_1$

$\beta_1 - \beta_2 = x_2$

$2\beta_1 = x_1 + x_2 \quad 2\beta_2 = x_1 - x_2$

$(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}(1,1) + \frac{x_1 - x_2}{2}(1,-1)$

$y(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2} \underset{\overset{\shortparallel}{13}}{y(1,1)} + \frac{x_1 - x_2}{2} \underset{\overset{\shortparallel}{7}}{y(1,-1)}$

$= 10 x_1 + 3 x_2$

Nous reviendrons à nouveau sur cette représentation par une matrice ligne dans le contexte des espaces métriques.

2.5.1 Espace dual E' = e-v dual

Si l'on considère l'ensemble des formes linéaires sur un espace vectoriel E, en le munissant de l'addition et de la multiplication par un scalaire que nous venons d'envisager, on peut voir (à faire en exercice) que cet ensemble est bien un espace vectoriel. Il s'agit de *l'espace dual de E.*

Définition 39 *L'espace (vectoriel) dual E' d'un espace vectoriel E est composé de l'ensemble des formes linéaires sur E, muni de la loi interne d'addition (2.5) et de la multiplication par un scalaire (2.6).*

Les vecteurs de l'espace dual sont donc des formes linéaires.

Nous allons maintenant introduire une notation supplémentaire, mais qui va nous faciliter le travail. Au lieu de noter l'image des formes linéaires $y(x)$ comme plus haut, nous noterons

$$\underbrace{y}_{\in E'}(\underbrace{x}_{\in E}) = [\overset{\in E}{x}, \overset{\in E'}{y}]. \quad \in E \times E'$$

Cette notation introduit une symétrie implicite entre les vecteurs de E et ceux de son dual E'. Nous pouvons alors réécrire la propriété (2.4) sous la forme

$$[\alpha x + \beta z, y] = \alpha[x, y] + \beta[z, y], \tag{2.7}$$

tandis que la propriété caractéristique des opérations sur les formes linéaires (les vecteurs du dual) s'écrit

$$[x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z]. \tag{2.8}$$

Nous prouvons ensuite deux propriétés importantes :

Théorème 2.23 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\{x_i\}_{i=1}^n$ une base de E et soit $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ un ensemble de n scalaires. Alors, il existe une et une seule forme linéaire y dans E' telle que

$$[x_i, y] = \alpha_i$$

pour $i = 1, \ldots, n$.

Preuve.

Chaque x de E peut s'écrire sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

43

$E \longrightarrow X = \text{base} = \{x_i\}_{i=1}$

$\boxed{y_1}$ $y_1(x_1) =$ → choisi
$y_1(x_2) =$
$y_1(x_3) =$
$\vdots$
$y_1(x_n) =$

y_1 : OK

$\boxed{y_2}$ $y_2(x_1) =$
$y_2(x_2) =$
$y_2(x_3) =$
$\vdots$
$y_2(x_n) =$

y_2 : OK

…… $\boxed{y_n}$ $y_n(x_1)$
$\vdots$
$y_n(x_{n-1}) =$
$y_n(x_n) =$

y_n : OK

$y_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, \forall j = 1, \dots, n$

1 ($i = j$) 0 ($i \neq j$)

$\longrightarrow \{y_1, \dots, y_n\} = \text{base de } E' = Y$

d'une et une seule manière. Donc, si y est une forme linéaire de E',

$$[x,y] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i [x_i, y].$$

Comme les β_i sont uniques pour chaque x, et à cause de la relation imposée à y dans la thèse, on voit que le seul y satisfaisant nos conditions est défini par

$$[x,y] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i$$

pour tout vecteur x de E. □

Théorème 2.24 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\{x_i\}_{i=1}^n$ une base de E. Alors il existe une base $\{y_i\}_{i=1}^n$ du dual E' telle que

$$[x_i, y_j] = \delta_{ij}, \tag{2.9}$$

pour tous les i et j entre 1 et n.

Preuve.

De la proposition 2.23, on peut déduire que, pour chaque $j = 1, \ldots, n$, il existe un seul y_j dans E' tel que (2.9) soit satisfaite. Il reste uniquement à vérifier que

$$X' = \{y_i\}_{i=1}^n$$

forme une base de E'. Vérifions d'abord que les vecteurs de X' sont linéairement indépendants. Pour cela, considérons une combinaison linéaire de ces vecteurs qui soit nulle. En d'autres mots, supposons que

$$[x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x, y_i] = 0$$

pour tout x dans E. Alors, nous avons, en choisissant $x = x_j$,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x_j, y_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j,$$

et ceci pour tout j entre 1 et n. Les vecteurs de X' sont donc linéairement indépendants. Considérons maintenant un vecteur y quelconque dans E' et notons

$$\alpha_i = [x_i, y] \quad (i = 1, \ldots, n),$$

ainsi que, pour un x quelconque de E,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i.$$

44

th 2.25 : Y = base de E $\Rightarrow \dim E' = n$

ii) LI : Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0_{E'}$ Alors $\forall j = 1, \dots, n : \alpha_j = 0_{\mathbb{K}}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in E : \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)(x) = 0_{E'}(x)$$

$$[x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x, y_i] = 0$$

Cas particulier

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x_j, y_i] = 0 = \alpha_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$y_i(x_j) = \delta_{ji}$$

$\forall j = 1, \dots, n$

× Générateurs de E'

$\forall y \in E' : \exists ? \alpha_i \in \mathbb{K} : y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$

$$\Leftrightarrow \forall x \in E : y(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)(x) \underset{\text{linéaire}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$$

$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$ (β_j connus)

$$y\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j\right)$$

(linéaire)

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i y(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j y(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boxed{\sum_{j=1}^{n} \beta_j \underbrace{y_i(x_j)}_{=\delta_{ij}}} = \beta_i$$

$$\Rightarrow \alpha_i = y(x_i)$$

cqfd

th 2.26 : $E \overset{\text{isomorphe}}{\equiv} E'$

$\underbrace{\dim E}_{n} = \underbrace{\dim E'}_{\text{Preuve th 2.25}} \Leftrightarrow E \equiv E'$

$$\boxed{\begin{array}{l} E \equiv \mathbb{K}^n \\ E' \equiv \mathbb{K}^n \end{array}} \downarrow E \equiv E'$$

$E \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$x = \sum \alpha_i x_i \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

par transitivité $E \equiv \mathbb{K}^n$, E' ///

On obtient alors

$$[x,y] = [\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i, y] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i [x_i, y] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i. \tag{2.10}$$

D'autre part,

$$[x, y_j] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i [x_i, y_j] = \beta_j,$$

et donc, en rebaptisant l'indice,

$$\beta_i = [x, y_i].$$

En remplacant cette valeur dans (2.10), nous obtenons

$$[x,y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x, y_i] = [x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i].$$

Comme x est arbitraire, on en tire que

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i,$$

et tout y de E' est combinaison linéaire des vecteurs de X', ce qui achève la démonstration. □

Une conséquence très importante de ce résultat est le corollaire suivant :

Théorème 2.25 L'espace (vectoriel) dual E' d'un espace vectoriel E de dimension n est aussi de dimension n.

Preuve.

Evidente d'après la proposition 2.24. □

Une conséquence immédiate de la dernière proposition est exprimée dans la proposition suivante :

Théorème 2.26 Tout espace vectoriel de dimension finie E est isomorphe à son dual E'.

Preuve.

Ceci résulte directement du fait que si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, alors E' l'est aussi, grâce aux lois que nous avons construites pour en faire un espace vectoriel (définies en (2.5) et (2.6)). Par le théorème 2.25, nous savons qu'ils sont de même dimension, ils sont donc isomorphes (par le théorème 2.4).□

La base de l'espace dual définie comme plus haut (cfr (2.9)) est aussi nommée la *base duale* associée à une base du primal. Nous présentons encore un corollaire facile de la proposition 2.24 :

$$X = \{x_i\}_{i=1}^{n} \longrightarrow Y = \{y_j\}_{j=1}^{n}$$

$x \in E$

$\hookrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad y_j(x) = y_j\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{y_j(x_i)}_{=\delta_{ij}} = \alpha_j$$

$y_j : E \to \mathbb{K}$

$\quad x \to x_j$ forme "coordonnées"

Exemples : $E = \mathbb{R}^2$ $\qquad E' = (\mathbb{R}^2)' = \{y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linéaire $\}$

$X = \{(1,1), (1,-1)\}$ $\qquad Y = \{y_1, y_2\}$

$y_1(1,1) = 1 \qquad y_2(1,1) = 0$

$y_1(1,-1) = 0 \qquad y_2(1,-1) = 1$

$y_1(a_1, a_2) = \alpha a_1 + \beta a_2 \qquad y_2(a_1, a_2) = \alpha a_1 + \beta a_2$

$y_1(1,1) = \alpha + \beta = 1 \qquad y_2(1,1) = \alpha + \beta = 0$

$y_1(1,-1) = \alpha - \beta = 0 \qquad y_2(1,-1) = \alpha - \beta = 1$

$\longrightarrow \alpha$ et $\beta = \frac{1}{2} \qquad \longrightarrow \alpha = 1/2 = -\beta$

$\longrightarrow y_1(a_1, a_2) = 1/2\, a_1 + 1/2\, a_2 \qquad \longrightarrow y_2(a_1, a_2) = 1/2\, a_1 - 1/2\, a_2$

$\neq$ car LI

2 formes linéaires indépendantes

Th 2.28 : $f : E \to E$ linéaire

$\qquad X \quad X$

$[f]_X^X = (a_{ij})$

$f(x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k$

$[f(x_j)] = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$a_{ij} = y_i(f(x_j)) = [f(x_j), y_i]$

Th 2.27 : $\forall x \neq 0 : \exists y \in E' : y(x) \neq 0_{\mathbb{K}}$

Par l'absurde $\xrightarrow{} x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$

$x \neq 0$

$\forall y \in E' : y(x) = 0$

$y\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right) = 0$

linéarité

$\sum_{i=1}^{n} \beta_i y(x_i) = 0$

CP : $y = y_j \to \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_j(x_i) = 0 = \beta_j \quad j = 1, \dots, n \to \boxed{x = 0}$

Contradiction !

Théorème 2.27 Pour tout vecteur non nul x d'un espace vectoriel de dimension finie E, il existe une forme linéaire y dans E', le dual de E, telle que

$$[x, y] \neq 0.$$

Preuve.

Soient $\{x_i\}_{i=1}^n$ et $\{y_i\}_{i=1}^n$ une base de E et sa base duale dans E', (satisfaisant donc (2.9)). Si

$$x = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$$

(comme plus haut), alors $\beta_i = [x, y_i]$. Donc, si $[x, y]$ est nul pour tout y, et en particulier pour y_i $(i = 1, ..., n)$, alors tous les β_i sont nuls et x l'est aussi. □

On peut voir immédiatement que cette dernière proposition implique que si u et v sont deux vecteurs différents d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors il existe une forme linéaire y dans E' telle que $[u, y] \neq [v, y]$. Il suffit en effet de substituer $x = u - v$ dans la proposition 2.27.

A partir de la base duale d'une base du primal X, on peut reconstruire la matrice associée à une transformation linéaire par rapport à cette base X par l'intermédiaire de crochets de dualité :

Théorème 2.28 Soit

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

une base quelconque de l'espace vectoriel E (de dimension n). Soit

$$X' = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

la base duale dans E' définie par la proposition 2.24. Soit, de plus, (a_{ij}) la matrice d'une transformation linéaire f sur E. Alors,

$$a_{ij} = [f(x_j), y_i].$$

Preuve.

Cette propriété résulte directement de la définition d'une matrice associée à une transformation linéaire par rapport à une base. En effet, nous avons que

$$f(x_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} x_k \quad (j = 1, ..., n). \tag{2.11}$$

et donc

$$[f(x_j), y_i] = \sum_{k=1}^n a_{kj} [x_k, y_i] = a_{ij}$$

46

$E \equiv E' \equiv E''$

e-v e-v e-v

dim n dim n

$X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ $Y = \{y_j\}_{j=1}^{n}$ $Z = \{z_k\}_{k=1}^{n}$

$y_j(x_i) = [x_i, y_j] = \delta_{ij}$ $z_k(y_j) = [y_j, z_k] = \delta_{jk}$

CCL : $\dim E = \dim E' = \dim E''$

$E \equiv E' \equiv E'' \equiv \dots$

$= \{z : E' \to \mathbb{K}$ linéaire $\}$

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$

$E' = (\mathbb{R}^2)' = \{y : \mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{linéaire}]{} \mathbb{R} : (e_1, e_2) \to \alpha e_1 + \beta e_2\}$

$E'' = (\mathbb{R}^2)'' = \{z : (\mathbb{R}^2)' \to \mathbb{R}$ linéaire $\}$

$z : (\mathbb{R}^2)' \to \mathbb{R}$

$y \to z(y) = 5 = 3 + 2 = \alpha + \beta$

tq $y(e_1, e_2) = \underset{\alpha}{3}e_1 + \underset{\beta}{2}e_2$

$E \equiv E''$ $\exists$ des bijections linéaires entre E et E''

$\to$ { bijection linéaire naturelle / isomorphisme naturel } entre E et E''

Th 2.30 : $\sigma : E \to E''$

$x \to \sigma(x) = z_x$

tq $\forall y \in E' : z_x(y) = y(x)$

$[y, z_x] = [x, y]$

$[\boxed{x}, y] = [y, \boxed{z_x}]$

réflexivité

$\sigma : E \to E''$?

$x \to z_x$

$\to z_x \in ? E'' = \{z : \boxed{E'} \to \mathbb{K}$ linéaire $\}$

$\boxed{\forall} y \in \boxed{E'} : z_x(y) = y(x) \in \mathbb{K}$

$\to z_x$ défini sur E'

en vertu de la relation (2.11). □

Autrement dit, pour trouver l'élement ij de la matrice associée à f par rapport à la base X, il suffit d'appliquer f au $j$ème vecteur de X et d'appliquer le $i$ème vecteur de X' au résultat (un vecteur de X' est, en effet, une forme linéaire sur E).

2.5.2 Réflexivité

Considérons maintenant le dual du dual de E, soit E'', appelé le *bidual* de l'espace vectoriel E. Ses vecteurs sont donc des formes linéaires, définies sur l'espace des formes linéaires sur E. Une première conséquence immédiate de cette définition :

Théorème 2.29 Tout espace vectoriel de dimension finie E est isomorphe à son bidual E''.

Preuve.
En effet, E' est isomorphe à E par la propriété 2.26 ; si nous appliquons la même propriété à E' plutôt qu'à E, nous obtenons que E'' est isomorphe à E'. En combinant les deux isomorphismes, nous obtenons la thèse. □

Dans le paragraphe qui suit, nous allons préciser l'isomorphisme qui les lie et lui donner une forme explicite. Commençons par la construction d'une correspondance entre E et E''.

Théorème 2.30 Soit E est un espace vectoriel de dimension finie ; à tout vecteur x de E, on peut faire correspondre un élément z_x défini par la relation $z_x(y) = y(x)$ pour tout y dans E'. Cet élément z_x appartient alors au bidual de E.

Preuve.
Si nous supposons que x est fixé, nous voyons que la fonction z_x, définie sur E', qui associe à y la valeur $z_x(y) = [x, y]$, est bien à valeurs dans $\mathbb{K}$. Nous en concluons que z_x est bien une forme définie sur E'.
Les lois introduites sur le dual pour en faire un espace vectoriel (définies en (2.5) et (2.6)), montrent de plus que z_x est linéaire. En effet, $\forall y_1, y_2 \in E', \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} z_x(\alpha y_1 + \beta y_2) &= (\alpha y_1 + \beta y_2)(x) \\ &= \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \\ &= \alpha z_x(y_1) + \beta z_x(y_2) \end{aligned}$$

En résumé, la relation $z_x(y) = [x, y]$ définit une forme linéaire sur E', càd que z_x est bien un élément de E''.□

Le raisonnement ci-dessus montre que les $z_x(\cdot) = [x, \cdot]$ sont des vecteurs de E''. Nous ne savons